

Барыкин В. Н.

Деформация физических моделей

Минск
«Ковчег»
2012

УДК 1
ББК 22.31
Б26

Барыкин, В. Н.

Б26 Деформация физических моделей / Барыкин В. Н. – Минск: Ковчег, 2012. – 240 с.

ISBN 978-985-7006-62-5.

На основе деформации симметрий предложено обобщение классической электродинамики Максвелла. Показано, что деформация симметрий позволяет описывать релаксационные процессы в электродинамике. Она основана на системе групп, которая названа сигруппой Галилея-Лорентца. Найдена её алгебра. Проанализированы разнообразные аспекты и следствия деформации физических моделей: её величин, дифференциальных и кодифференциальных операторов, начальных и граничных условий. Предложена единая модель для электромагнетизма и гравитации. Построены функциональные уравнения, на основе которых обобщена теория кохомологий групп. Показано, как деформация модели инициирует деформацию её логической структуры и интерпретацию экспериментов.

**УДК 1
ББК 22.31**

ISBN 978-985-7006-62-5

© Барыкин В. Н. 2012

© Оформление.

ООО «Ковчег», 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. СВЕРХСВЕТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА ...	9
1.1. ДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ	11
1.2. ОБОБЩЕННАЯ СВЯЗЬ ПОЛЕЙ И ИНДУКЦИЙ	12
1.3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА	16
1.4. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА	17
1.5. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ	20
1.6. НОВОЕ УСЛОВИЕ НА ФАЗУ ВОЛНЫ	22
1.7. ДИНАМИКА ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА И АБЕРРАЦИИ	24
1.8. НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОБОБЩЕННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ	27
1.9. МЕХАНИЧЕСКИЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОЛЯ	32
1.10. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАКСВЕЛЛА	33
1.11. АНАЛИЗ ПРИНЯТЫХ ДОПУЩЕНИЙ	40
ВЫВОДЫ	50
2. К ЕДИНСТВУ МАКРОТЕЛ И ЧАСТИЦ СВЕТА	51
2.1. НЕНУЛЕВАЯ МАССА МОЖЕТ СТАТЬ НУЛЕВОЙ	51
2.2. СВЕРХСВЕТОВЫЕ СКОРОСТИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ	54
2.3. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ НЕДОСТАТОЧНА ДЛЯ ФИЗИКИ СВЕТА	55
2.4. ФИЗИКА УПРАВЛЯЕТСЯ СЕМЕЙСТВОМ ЧЕТЫРЁХМЕТРИК	58
2.5. СКОРОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИ ПРЕОБРАЗУЕТСЯ В ЧАСТОТУ	58
2.6. ПОСТОЯННАЯ ПЛАНКА МОЖЕТ МЕНЯТЬСЯ ДИСКРЕТНО	60
2.7. У ЧАСТИЦ СВЕТА МОГУТ БЫТЬ ДИНАМИЧЕСКИЕ РАЗМЕРЫ	63
2.8. СИЛА СПОСОБНА ВЫРАЖАТЬ СОСТАВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ	64
2.9. К НОВОЙ КОНЦЕПЦИИ ЗАИМОДЕЙСТВИЯ	65
3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В СПИНОРНОЙ ФОРМЕ	68
4. ГРУППА ЗАПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	76

4.1. СВОЙСТВА МОНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ	77
5. СТРУКТУРА ГРУППЫ ЗАПОЛНЕНИЯ	83
6. СИСТЕМА СУПЕРАЛГЕБР	85
6.1. НОВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА	86
6.2. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ	90
6.3. СУПЕРАЛГЕБРА ДЛЯ ГРУППЫ ПАУЛИ	90
6.4. СУПЕРАЛГЕБРЫ ДЛЯ МОНОМИАЛЬНОЙ ГРУППЫ ...	92
7. ДЕФОРМАЦИЯ СИММЕТРИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ	98
7.1. СВОЙСТВА СИГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ-ЛОРЕНТЦА	102
8. КОМПЕНСАЦИЯ ДЛЯ СИГРУППЫ	109
9. АБЕЛЕВА ГРУППА ДЕФОРМАЦИЙ.	113
10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ.	116
11. ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ.	128
12. КАК ОБЪЕДИНИТЬ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ГРАВИТАЦИЮ	138
ОБЪЕДИНЕНИЕ ИНДУКЦИЙ	143
13. МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИИ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЭЛЕКТРОДИНАМИКОЙ	149
ПРОСТЕЙШАЯ ВЕКТОРНАЯ МАССОДИНАМИКА	151
14 .ПЕРСПЕКТИВЫ ДЕФОРМАЦИИ МОДЕЛЕЙ	173
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	176
ЛИТЕРАТУРА	177

ВВЕДЕНИЕ

Изменения, вносимые в физическую теорию, иногда можно рассматривать с позиции деформации физических моделей. В монографии рассмотрены элементы такой деформации и некоторые следствия из неё на примере электродинамики движущихся сред, теории гравитации и теории когомологий групп.

При рассмотрении деформации с математической точки зрения мы обнаруживаем новые черты физического моделирования. Они достаточно сложны. Расширение симметрий, контракция симметрий образуют элементы модели деформации симметрий. Проблемы расширения симметрий принято решать в рамках теории когомологий.

Деформация предполагает изменение структурных элементов исследуемого объекта, а также связей между его составляющими. Обычно объекты, ассоциированные с деформацией, представляют собой группы или алгебры.

При анализе группы мы меняем генераторы симметрии и параметры симметрии, они согласованы между собой. По этой причине естественно рассматривать возможности отдельного изменения элементов по каждой из указанных групп, а также их некоторого сочетания. При анализе алгебры мы имеем систему элементов алгебры и отношений между ними, выраженных, например, в форме коммутационных соотношений.

Сущность изменений во всех случаях сводится к тому, что какие-то элементы физической или математической модели получают множители, а какие-то элементы получают добавки, имеют аддитивную составляющую. Изменения величин всегда можно формально записать в виде суммы нескольких слагаемых, имеющих частный вид общей структуры. Физическая причина такого разложения не всегда ясна.

Специфической чертой деформации является то, что изменения реализуются частично. Этот случай, естественно, наиболее сложен. Частичных изменений может быть много. Сложно найти изменения, которые имеют глубокое математическое содержание, равно как и реальное физическое содержание. Редко

бывает так, чтобы деформации рассматривались как активное дополнительное звено математической или физической модели. Частичное изменение модели с активными элементами или активная частичная деформация представляют собой столь же сложный элемент теории, как и само моделирование явлений без элементов деформации. Понятно, что в обоих указанных случаях есть общая теория и элементы частных, индивидуальных изменений модели.

При рассмотрении проблемы деформации физической модели мы обязаны представлять себе структуру физической модели. Она проста по своему общему виду. Физические модели содержат совокупность величин. Эти величины согласованы между собой посредством дифференциальных или интегральных операторов. Кроме этого, модель учитывает систему ранговых движений, к которым относятся скорости, ускорения и т.д. В модель входят также величины, управляющие указанной выше системой величин. Кроме этого, есть определенное согласование всех величин и операторов между собой.

По указанным причинам деформация физической модели имеет место во всех случаях, когда изменяется хотя бы один элемент этой модели. Это изменение обычно реализуется посредством дополнительных элементов, присущих физической модели. Это могут быть и величины, и операции, и характеристики, управляющие движениями.

Заметим, насколько тонка практика деформирования физических моделей. С одной стороны, физические модели достаточно совершенны. Они позволяют решать конкретные задачи высокой сложности. Прагматичность моделей бесспорна.

С другой стороны, физическая модель не может описать все тонкости и черты явлений или исследуемых объектов. Деформация выступает в роли средства, дополняющего и уточняющего известные физические модели, углубляя её возможности.

Проведенный анализ показал неточности начального подхода к деформации электродинамики Максвелла. Проиллюстрируем этот тезис.

Исходным пунктом стандартной электродинамики была электродинамика Максвелла в вакууме. Отметим неточности такого подхода. Во-первых, никто и никогда не проводил иссле-

дование электромагнитных полей в вакууме при создании электродинамики. Вопрос о поведении поля в вакууме возникал ещё у Фарадея, который признался, что непонятно, как проводить исследование. Для создания глубокого вакуума нужна особая техника, которой не было ни у Максвелла, ни у его последователей. Все эксперименты проводились в физических средах. В качестве одной из таких сред выступал воздух. Электродинамика Максвелла отождествлялась с электродинамикой в воздухе. Но это совсем другой случай. Ведь в вакууме, с физической точки зрения, не может быть взаимодействия и излучения света атомами. В воздухе реализуется и то, и другое. С физической точки зрения нужна физическая величина, которая описывает различие вакуума и атмосферы. Об этом думали многие исследователи, но было трудно найти математическое выражение для отличия воздуха и вакуума.

Во-вторых, отказ от физической среды, реализованный в электродинамике вакуума, нашел отражение в отказе от исследования свойств физической среды как фактора, влияющего на электромагнитное поле. Поэтому измерение как воздействие на явление не рассматривалось в физической теории света..

В-третьих, принятие скорости света в вакууме как фундаментальной скорости привело к отказу от анализа скорости света в среде, которая делится на показатель преломления. Если бы изначально был понят факт, что в преобразованиях систем координат, используемых для анализа симметрий и сравнения экспериментальных данных, входит скорость в среде, мы бы изначально исследовали новый математический объект. Ведь произведение преобразований координат с разными показателями преломления выходит за рамки исследуемого семейства.

В-четвёртых, анализ инерции не должен ограничиваться учётом относительных скоростей. В теории физических тел при отсутствии влияний на него сохраняется не только скорость, но и частота вращения. В электромагнитных явлениях есть и скорость, и частота. Эксперименты показывают, что эти величины меняются согласованно друг с другом. Поэтому, желая учесть изменение частоты, мы можем реализовать его на основе изменения соотношения времен в преобразованиях систем отсчёта. И дело совсем не в фундаментальной концепции относительности

одновременности, а в потребности корректно учитывать согласованное изменение скорости и частоты.

В-пятых, принимая в качестве фундаментальных преобразований координат преобразования, принадлежащие группе Лорентца, мы не обязаны отказываться от физических размеров, для описания которых принято использовать преобразования Галилея. Необходимо корректно различать пространство скоростей и пространство размеров.

В-шестых, свет представляет собой физическую сущность со свойствами, существенно отличающимися от свойств макроскопических тел. Движение с большой скоростью, какую имеет свет, очень сложно реализовать для макроскопических тел. Кроме этого, нет оснований для того, чтобы рассматривать свет как изделие, изготовленное из атомов и молекул. Скорее, наоборот, атомы и молекулы «изготовлены» из света. По этой причине свет анализировать нужно несколько иначе, чем материальные объекты.

Электродинамику без ограничения скорости, которая будет представлена ниже, можно рассматривать как новый вариант деформированной модели электродинамики. Она является продолжением начальной деформации, предпринятой Лорентцом, Пуанкаре, Минковским, Эйнштейном, Герцем.

Сущность новых изменений состоит в том, что в электродинамику введен показатель отношения. Он выступает в роли физической величины, которая позволяет описать согласованное изменение скорости и частоты электромагнитного поля. Показатель отношения выступает в роли параметра деформации физической модели. Он используется как множитель перед скоростью света. На этой основе в основном меняются связи между полями и индукциями. Дополнительные изменения имеют место в условии на фазу волны.

Практика деформации физических моделей позволяет ввести общее правило поведения исследователя: некорректно пренебрегать тем, что неизвестно или известно недостаточно. С учётом того факта, что наше незнание существенно превосходит наше знание, нужно быть осторожными с выводами из исследуемой модели, особенно с теми, которые имеют значение для науки в целом или для её существенного раздела.

1. СВЕРХСВЕТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА

Известно, что единое описание экспериментальных данных в электродинамике Максвелла при учете всей совокупности относительных движений было достигнуто на основе специальной теории относительности, созданной Эйнштейном А. [1]. Она базируется на трех принципах: а) относительности, б) постоянства скорости света в вакууме, в) неявном постулате об отсутствии эфира.

В теории использована концепция относительной длины и синхронизированного времени, что индуцирует модель 4-мерного псевдоевклидова пространства-времени Минковского.

Группа Лорентца в этом случае задает в пространстве решений алгоритм кинематического описания физических явлений в электродинамике движущихся сред, в частности, эффекта Допплера и аберрации. Этот подход оказался достаточным не только для классической электродинамики. Глубина и полезность кинематического релятивистского метода подтверждена всем развитием физики XX века.

Однако новое время ставит новые задачи. Экспериментально установлены корпускулярные свойства света, проявляющиеся в фотоэффекте и эффекте Комптона [2]. Но в современной теории фотон рассматривается как квазичастица. Именно релятивистский подход не позволяет ввести его размер и отрицает возможность его внутреннего движения. Квант света – фотон – бесструктурен.

Экспериментально Демельтом Х. [3] определен размер центрального ядра – тела электрона. Он значительно меньше радиуса действия ядерных сил и равен $r_e \approx 10^{-22}$ м. Известно, что электрон и позитрон рождаются при столкновении γ -квантов:

$$\gamma + \gamma \Rightarrow e^- + e^+.$$

Описание таких явлений проводится квантовой электродинамикой, но в ней по-прежнему квантовые частицы бесструктурны. Экспериментально подтверждено наличие спина – внутреннего движения у фотона и электрона, однако отсутствует его пространственно-временная модель.

Эти и другие факты инициируют вопросы:

- а) Является ли механизм релятивистского описания электродинамических явлений единственным?
- б) Возможно ли полное и последовательное описание всей совокупности экспериментальных данных без специальной теории относительности и без тех ограничений, которые из нее следуют?
- в) На какой основе и как это сделать, какие новые следствия это дает?

Покажем, что возможна модель динамического изменения параметров электромагнитного поля в рамках ньютоновского пространства-времени. Используем концепцию единичного наблюдателя и связанную с ним единственную декартову систему координат. Будем рассматривать реальную систему отсчета как физическую среду, способную не только измерить, но и изменить параметры поля.

Отметим, что данная версия соответствует стандартному подходу к физическим явлениям. Рассматривается модель, ищущая её прямые или косвенные следствия, которые называются решениями. Далее проводится согласование расчета с экспериментом и их взаимная коррекция. В полной мере овладеть практикой удастся только в том случае, если последовательно и правильно учтены все существенные физические и математические грани исследуемых конструкций и их движений. Такой подход использовался в физике всегда. Он не изменен с появлением теории относительности.

Но в релятивистском подходе есть своя специфика согласования эксперимента и расчета в электродинамике и механике. Она базируется на симметрии форминвариантности используемой модели. Симметрия как бы заменяет физическую модель. Понятно, что она не в состоянии заменить её полностью. Ведь в этом случае следовало бы считать, что физическая модель эквивалентна симметрии форминвариантности. Реальная ситуация

иная: симметрия обычно «уже» физической модели по своим свойствам и возможностям.

1.1. ДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Будем исходить из модели, базирующейся на концепции единичного наблюдателя. Пусть он обеспечен необходимыми измерительными устройствами, достаточными для исследования электромагнитных явлений. Примем точку зрения, что наблюдатель использует «абсолютные» эталоны длины и времени в соответствии с физической моделью пространства Ньютона $R^3 \times T^1$. Фактически это означает принятие одного из вариантов проведения оценок и вложения опыта. Так фиксируется пространство для измерительных устройств и для величин, измеряемых на эксперименте.

Физические законы электродинамики Максвелла также задаются в $R^3 \times T^1$. В соответствии с принятым подходом мы записываем уравнения в форме трехмерных операторов rot и div :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi \frac{\vec{J}}{c}.$$

Объединим векторные поля в тензоры

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения Максвелла получают вид

$$\partial_{[k} F_{mn]} = 0, \quad \partial_k H^{ik} = S^i.$$

Отметим очевидный факт, что уравнения инвариантны относительно невырожденных линейных преобразований координат. Здесь ∂_k – частные производные по координатам

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^0 = ict.$$

Примем следующую постановку задачи:

1. Найти обобщение уравнений Максвелла, из которого, учитывая свойства реальных физических сред и не используя какой-либо модели эфира, удастся единым образом описать опыты Бредли, Допплера, Физо, Майкельсона, «постоянство» скорости света в вакууме по Эйнштейну.
2. Построить модель динамического изменения инерции поля, оставаясь в рамках концепции ньютоновского пространства и времени.

1.2. ОБОБЩЕННАЯ СВЯЗЬ ПОЛЕЙ И ИНДУКЦИЙ

Известно, что в покоящейся изотропной среде связь полей и индукций имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{E}.$$

Здесь ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Эти уравнения не содержат скоростей и факторов управления ими и потому кажутся простыми. Однако без них физические задачи бессодержательны. В конкретных ситуациях важно разобратся в структуре связей, правильно учесть все, что необходимо и достаточно для достижения согласия с экспериментом. Практика показывает, что связи, как и всё конкретное, могут быть чрезвычайно сложны. Более того, они способны управлять явлениями.

В варианте, рассмотренном Минковским, учтена скорость среды $\vec{u}_m$. В его подходе среда является вторичным источником излучения. В данном выражении отсутствует скорость первичного источника излучения $\vec{u}_{fs}$. Не сделаны какие-либо предположения о структуре излучения. Отсутствует анализ и алгоритм воздействия измерительных устройств на поле. С экспериментом согласуются связи вида

$$\vec{D} + \left[\frac{\vec{U}_m}{c} \times \vec{H} \right] = \varepsilon \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{U}_m}{c} \times \vec{B} \right] \right),$$

$$\vec{B} + \left[\vec{E} \times \frac{\vec{U}_m}{c} \right] = \mu \left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{U}_m}{c} \right] \right).$$

В силу указанных обстоятельств желательно обобщить связи, предложенные Минковским. Новые связи между полями F_{mn} и индукциями H^{ik} можно искать в форме [4]:

$$H^{ik} = \Omega^{im} \Omega^{kn} F_{mn},$$

полагая, что в частном случае они переходят в известные. Пусть

$$\Omega^{im} = \alpha (\Theta^{im} + \beta U^i U^m).$$

Здесь α, β – скалярные функции, Θ^{im} – некий метрический тензор, $U^i = dx^i / d\Theta$ – четырехскорости, $d\Theta^2 = \Theta_{ij} dx^i dx^j$. На начальном этапе анализа выражение для Ω^{im} было найдено в [5] на основе решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Оно следует из обобщенной формальной связи для полей и индукций. При равном нуле скорости они переходят в известные уравнения. Было получено решение вида

$$\Omega^{im} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\Theta^{im} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{\chi} - 1 \right) U^i U^m \right].$$

Здесь $\Theta^{im} = \text{diag} (1, 1, 1, \chi)$, $\chi = \det \Theta^{im}$. Тензор Ω^{im} не имеет сингулярности при $\chi = 0$:

$$d\Theta = \frac{icdt}{\sqrt{\chi}} \left(1 - \chi \frac{U^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad U^k = \frac{dx^k}{d\Theta} = \frac{\sqrt{\chi}}{ic} \frac{dx^k}{dt} \left(1 - \chi \frac{U^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

При определении $U_n = \Theta_{nk} U^k$ получим $U^k U_k = 1$. С учетом антисимметрии F_{mn} и H^{ik} можно использовать выражение

$$H^{ik} = \Omega^{ikmn} F_{mn}, \quad \Omega^{ikmn} = 0,5 (\Omega^{im} \Omega^{kn} - \Omega^{in} \Omega^{km})$$

с условиями

$$\Omega^{ikmn} = -\Omega^{iknm} = -\Omega^{kimn}.$$

Начальный вариант обобщения состоял в том, что уравнения Максвелла оставались неизменными

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Были частично деформированы связи между полями и индукциями [6]:

$$\begin{aligned} \vec{D} + \chi \left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{H} \right] &= \varepsilon \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{U}}{c} \times \vec{B} \right] \right), \\ \vec{B} + \chi \left[\vec{E} \times \frac{\vec{U}}{c} \right] &= \mu \left(\vec{H} + \left[\vec{D} \times \frac{\vec{U}}{c} \right] \right). \end{aligned}$$

На этой стадии требуется решить ряд проблем:

- Какое выражение для скорости следует использовать?
- Требуется ли и каким образом менять дифференциальные уравнения Максвелла, если принято решение об учёте и изменении величины χ ?
- Какие физические и математические следствия дает предлагаемое обобщение?

Покажем, что предложенные связи между полями и индукциями переходят в известные. Действительно, при скорости $\vec{U}$, равной нулю, имеем

$$U^k \Big|_{\vec{U}=0} = (0, 0, 0, \sqrt{w}),$$

$$\Omega^{ij} \Big|_{\vec{U}=0} = \alpha \Theta^{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \Omega^{0i} = \Omega^{i0} = 0,$$

$$\Omega^{00} \Big|_{\vec{U}=0} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[w + \left(\frac{\varepsilon \mu}{w} - 1 \right) w \right] \equiv \varepsilon \sqrt{\mu}.$$

1.3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть источник первичного излучения движется вокруг Земли в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, которая является скоростью первичного источника $\vec{U}\big|_{\rho=0}=\vec{U}_{fs}$. Пусть излучение распространяется из вакуума в атмосферу Земли с плотностью ρ , в которой при $\rho=\rho_0$ скорость вторичного источника излучения становится равной скорости физической среды

$$\vec{U}\big|_{\rho=\rho_0}=\vec{U}_m.$$

Введем величину

$$\vec{U}=\vec{U}(\vec{U}_{fs},\vec{U}_m,w(\rho)),$$

полагая, что она зависит от функционала $w(\rho)$. Назовем его показателем отношения.

Основное допущение состоит в подчинении скорости $\vec{U}$ релаксационному уравнению

$$\frac{d\vec{U}}{d\xi}=-P_0(\vec{U}-\vec{U}_m), \quad \vec{U}\big|_{\xi=0}=\vec{U}_{fs}, \quad \xi=\rho/\rho_0.$$

Этот подход согласуется с физической постановкой анализируемой задачи [7]. Ведь из-за взаимодействия со средой скорость первичного источника излучения может релаксировать к скорости вторичного источника излучения. Получим решение

$$\vec{U}=(1-w)\vec{U}_{fs}+w\vec{U}_m, \quad w=1-\exp\left(-P_0\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Показатель отношения w введен в модель из физических соображений. Он порожден анализом динамики параметров явления. Так, например, получим

$$\vec{U}\Big|_{\rho=\rho_0}=\vec{U}_{fs}, \quad w\Big|_{\rho=0}=0, \quad \vec{U}\Big|_{\rho=\rho_0}=\vec{U}_m, \quad w\Big|_{\rho=\rho_0}=1.$$

Примем дополнительное условие:

$$\chi = w.$$

Рассматриваемый вариант является частным случаем общей ситуации, в которой скорость подчинена динамическим уравнениям. Так и должно быть в реальных физических задачах, в которых физические величины динамичны.

1.4. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уравнения для потенциалов поля A_m в их четырехмерной форме, когда $w = const$, имеют вид [8]:

$$\left[\Theta^{kn} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^n} - (\varepsilon\mu - w) \left(V^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2 \right] A_m = -\mu U^i \Theta_{im}, V^k = \frac{U^k}{\chi}$$

с условием калибровки

$$\Theta^{kn} \frac{\partial A_n}{\partial x^k} + (\varepsilon\mu - w) \frac{\partial A_l}{\partial x^k} U^l U^k = 0.$$

Для векторного $\vec{A}$ и скалярного φ потенциалов согласно их определению

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

получим

$$\widehat{L}\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \left\{ \vec{J} + \frac{\sigma\Gamma^2}{\sigma+w} \frac{\vec{U}}{c} (w\vec{U} \cdot \vec{J} - c^2\rho) \right\},$$

$$\widehat{L}\phi = -4\pi\mu \frac{\Gamma^2}{w+\sigma} \left\{ \rho \left(1 - \varepsilon\mu \frac{U^2}{c^2} \right) + \sigma \frac{\vec{U} \cdot \vec{J}}{c^2} \right\}$$

и условие калибровки

$$\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{w}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\sigma\Gamma^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \right) (\vec{U} \cdot \vec{A} - c\phi) = 0.$$

Здесь

$$\widehat{L} = \left(\Delta - \frac{w}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \sigma \frac{\Gamma^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \right)^2,$$

$$\sigma = \varepsilon\mu - w, \quad \Gamma^2 = (1 - w\beta^2)^{-1}, \quad \beta = \frac{U}{c}.$$

Функция Грина для векторных уравнений вида

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4 \mu (r^2 + \xi^2)^{-1/2} \delta \left(t - \frac{1}{c} \frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1 - w\beta^2) \sqrt{\varepsilon\mu}} (r^2 + \xi^2)^{1/2} \right)$$

указана в [7]. В цилиндрической системе координат, радиус-вектор которой есть $R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, имеем величины

$$r^2 = \rho^2 \frac{\varepsilon\mu(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}, \quad \xi = z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} Ut.$$

При $\beta = 0$ получим функцию Грина для покоящего источника в среде без дисперсии

$$G_0(\vec{r}, t)|_{\vec{U}=0} = 16\pi^4 \mu \frac{1}{R} \delta\left(t - \frac{R\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right).$$

Она отлична от нуля на поверхности

$$t = \frac{1}{c} \frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1-w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\rho^2 \frac{\varepsilon\mu(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} Ut \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Это эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с $\vec{U}$, а положение центра задается соотношением

$$z_0 = Ut \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, перемещается со скоростью

$$U_0 = U \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Полуоси эллипса

$$a = ct \left(\frac{1-w\beta^2}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} \right)^{1/2}, \quad b = ct \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}(1-w\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}$$

нелинейно зависят от w . Имеем обобщенное дисперсионное уравнение

$$c^2 K^2 = w\omega^2 + \Gamma^2 (\mathcal{A} - w) (\omega - \vec{K} \cdot \vec{U})^2$$

для электромагнитного поля. Из него следует выражение

$$\vec{V}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{K}} = c \frac{K + \sigma \Gamma^2 c^{-2} \vec{U} (\omega - \vec{K} \cdot \vec{U})}{\frac{\omega}{c} w + \sigma \Gamma^2 c^{-1} (\omega - \vec{K} \cdot \vec{U})}$$

для групповой скорости. В нерелятивистском пределе

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) \left[(1 - w) \vec{U}_{fs} + w \vec{U}_m \right].$$

Это выражение дает зависимость групповой скорости электромагнитного поля не только от показателя преломления, но и от показателя отношения, не только от скорости среды, но и от скорости первичного источника излучения. При переменном показателе отношения мы обязаны ввести в уравнения Максвелла ввести новые слагаемые и новую связность. Общий алгоритм известен: требуется заменить частные производные на «ковариантные». Однако, что не менее важно, кроме показателя отношения могут понадобиться другие физические величины.

1.5. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. При $w = 0$ получим

$$\vec{V}_g = c \frac{\vec{K}}{K} + \vec{U}_{fs}.$$

Значит, в обобщенной модели электромагнитных явлений поле в вакууме движется таким образом, что центр поверхности, на которой функция Грина отлична от нуля, движется со скоростью $\vec{U}_{fs}$, а полуоси эллипса в данном случае равны, задавая сферу переменного радиуса. Такая картина соответствует интуитивному пониманию факта, что в отсутствие внешних влияний поле сохраняет свою инерцию.

2. Обобщенная электродинамика Максвелла согласуется с опытами Майкельсона. Согласно условиям его эксперимента, скорость среды, как и скорость источника излучения, были равны нулю: $\vec{U}_m = 0$, $\vec{U}_{fs} = 0$. По этой причине из уравнений следует независимость скорости излучения от направления распространения излучения, так как

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K}.$$

3. Обобщенная электродинамика Максвелла согласуется с опытом Физо. Согласно условиям его опыта имеем $\vec{U}_{fs} = 0$ и $w = 1$. Поэтому скорость равна

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \vec{U}_m.$$

Мы рассмотрели обобщение электродинамики Максвелла, в котором динамические уравнения оставлены без изменений и обобщены только связи между полями и индукциями. Они содержат скорость первичного источника излучения $\vec{U}_{fs}$, скорость среды $\vec{U}_m$, а также новую величину: показатель отношения электромагнитного поля к среде $w(\rho)$. Расчет параметров поля и анализ экспериментальных данных выполнен в рамках модели пространства Ньютона. Абсолютность длины и времени является базовым положением для предлагаемого алгоритма анализа

динамического изменения параметров поля. Выведены уравнения для четырехпотенциалов, следующие из обобщенной системы уравнений Максвелла. Найдена функция Грина и проанализированы ее физические следствия. Получено обобщенное выражение для групповой скорости поля. Показана зависимость скорости поля в вакууме от скорости первичного источника излучения.

1.6. НОВОЕ УСЛОВИЕ НА ФАЗУ ВОЛНЫ

Изучим динамику частоты поля. Групповая скорость электромагнитного поля, согласно полученным решениям, при $w \rightarrow 0$ не зависит от $\vec{U}_{fs}$. Такое изменение, с физической точки зрения (поскольку скорость не может исчезнуть бесследно), должно проявиться в изменении частоты. Чтобы разобраться, как это происходит, дополним дисперсионное уравнение обобщенным фазовым условием, следуя [9]:

$$\frac{\omega - \vec{K} \cdot \vec{U}_{\xi}}{\left(1 - w_{\xi} \frac{U_{\xi}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = const.$$

Оно не следует непосредственно из уравнений Максвелла. Это обстоятельство позволяет считать, что скорость $\vec{U}_{\xi}$ может быть отличной от введенной выше обобщенной скорости $\vec{U}$. Следуя предложенной модели анализа поля, введем

$$\vec{U}_{\xi}(\vec{U}_{fs}, \vec{U}_m, w_{\xi}(\rho)) \neq \vec{U}.$$

Зададим для нее, аналогично $\vec{U}$, уравнение

$$\frac{d\vec{U}_\xi}{d\xi} = -P_\xi (\vec{U}_\xi - \vec{U}_*), \quad \vec{U}_\xi \Big|_{\rho=0} = \vec{U}_{fs}$$

релаксационного типа [7]. Желая сохранить $\vec{U}_{fs}$ в зависимости для $\vec{U}_\xi$, примем релаксационное значение скорости

$$\vec{U}_* = \vec{U}_{fs} + \vec{U}_m.$$

Этот вариант возможен в предлагаемой модели. Решение

$$\vec{U}_\xi = \vec{U}_{fs} + w_\xi \vec{U}_m, \quad w_\xi = 1 - \exp\left(-P_\xi \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

ведет себя иначе, чем полученное для анализа скоростей. Так и должно быть по физике явления. "С кинематической точки зрения" скорость $\vec{U}_{fs}$ из-за взаимодействия со средой исчезает при $w=1$ и в групповой скорости не проявляется. "С энергетической точки зрения" она превращается в частоту ω . Понятно, почему так происходит.

Дисперсионное и фазовое условия в предлагаемой модели выполняют разные роли и имеют функции, дополнительные друг другу. Их можно рассматривать как систему дисперсионных уравнений. Частоты ω и скорости $\vec{U}$ можно интерпретировать как внутренние и внешние потенциальные функции инерции поля.

Рассматриваемый вариант становится более простым и очевидным, если принять во внимание возможность числового обобщения связей между полями и индукциями. Дополним рассмотренные выше «внешние» условия для поля «внутренними» условиями. Пусть они относятся к «мнимой части» связей:

$$\Omega^{im} = \alpha(\theta^{im} + \beta U^i U^m) + jQU^i{}_\xi U^m{}_\xi,$$

Тогда «внешнее» дисперсионное уравнение будет дополнено «внутренним» дисперсионным уравнением. Оно базируется на обобщенных связях и остается в рамках электродинамики Максвелла.

Этот и другие моменты убеждают в том, что наши знания и представления о поведении, а потому и о модели света, могут отображать лишь верхушку «айсберга», центр тяжести которого находится далеко от нашей «поверхности обзора». Кроме внешних проявлений электромагнетизм имеет внутреннюю структуру и внутреннюю динамику. С точки зрения идеологии частиц света такой подход естественен.

1.7. ДИНАМИКА ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА И АБЕРРАЦИИ

Примем точку зрения, что изменение параметров инерции электромагнитного поля происходит только из-за взаимодействия со средой или другими полями. Изучим эти процессы.

Уточним постановку рассматриваемой выше модельной задачи. Пусть излучение с начальным значением частоты ω_0 и волновым вектором $\vec{K}_0$ распространяется от источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, к поверхности Земли, на которой находится наблюдатель. Пусть атмосфера покоится: $\vec{U}_m = 0$. Требуется рассчитать, как меняются частота ω и волновой вектор $\vec{K}$ при взаимодействии излучения со средой.

Примем дополнительное условие, согласовывающее "внешнее" и "внутреннее" поведение поля:

$$w = w_{\xi}.$$

Объединим в единую систему дисперсионное уравнение и фазовое условие [5]:

$$c^2 K^2 - w \omega^2 = \Gamma^2 (\epsilon \mu - w) (\omega - \vec{K} \cdot \vec{U})^2,$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - w U_{fs}^2 / c^2\right)^{1/2} + \vec{K} \cdot \vec{U}_{fs}.$$

В начальной стадии исследуемого динамического процесса $w_{fs} = 0$ и волновой вектор $\vec{k}$ перпендикулярен скорости u_{fs} , что приводит к условию $\omega_0 = const$. Примем допущение, что $K_{y_0} = 0$, $K_z = K_{z_0}$. Найдем зависимость ω , K_x от начальных значений ω_0 , K_{z_0} . Преобразуем, с точностью до $(U_{fs}/c)^2$, дисперсионное уравнение к виду

$$AK_x^2 + BK_x + P = 0.$$

Его коэффициенты равны:

$$A = 1 - a \frac{U_{fs}^2}{c^2}, \quad a = w + \varepsilon \mu w^2 - w^3,$$

$$B = w \frac{w_0}{c} \frac{U_{fs}}{c} b, \quad b = 1 + \varepsilon \mu - w,$$

$$P = \frac{w_0^2}{c^2} \frac{U_{fs}^2}{c^2} q, \quad q = w^2 - 2w^3 + w^4 + 2\varepsilon \mu w^2 - w^3 \varepsilon \mu.$$

Рассчитаем a , b , q для $\varepsilon \mu = 1$. Удобно выразить решение через функцию

$$\Phi = w[(2 - w) - (1 - w)^{1/2}].$$

Получим для величины K_x нелинейную зависимость от w :

$$K_x = \Phi \frac{\omega_0}{c} \frac{U_{fs}}{c}.$$

Угол аберрации определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K_x}{K_z} = \frac{U_{fs}}{c} \Phi.$$

Связь начальной и промежуточной частоты

$$\omega = \omega_0 \left[\left(1 - w \frac{U_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} + \Phi \frac{U_{fs}^2}{c^2} \right]$$

зависит от величины w . Вдали от поверхности Земли, согласно расчетным данным, получим

$$K_x = 0, \quad K_z = -\frac{\omega_0}{c}, \quad \omega = \omega_0.$$

По мере приближения к Земле величины K_x , ω меняются непрерывно из-за изменения w . В конце процесса, когда $w=1$, получим

$$K_x = \frac{\omega_0}{c} \frac{U_{fs}}{c}, \quad \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Эти величины согласуются с экспериментом Бредли и с формулой для поперечного эффекта Доплера. Аналогичные результаты получаются в специальной теории относительности. Предложенная модель электромагнитных явлений дает как конечные

значения параметров динамического процесса, так и закон преобразования скорости в частоту.

Следуя проведенному расчету и сделанным выводам, мы вправе рассматривать специальную теорию относительности как формальную математическую теорию кинематического типа. Она применяется по алгоритму, соответствующему модели черного ящика: по входным параметрам явления ищутся параметры явления на выходе из черного ящика. Ни процесс взаимодействия, ни его физический механизм не раскрываются. Не учитываются также граничные условия.

Предложенное обобщение позволяет описывать динамику величин $(\omega, \vec{v}_g)$, выражая их через начальные параметры явления:

$$\omega = \omega_0 + \left(\Phi - \frac{1}{2} w \right) \frac{U_{fs}}{c} \omega_B, \quad \vec{V}_g \equiv \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2} \right) (1 - w) \vec{U}_{fs}.$$

Здесь

$$\omega_B = \omega_0 \frac{U_{fs}}{c}.$$

Алгоритм расчета состоит в том, что мы «тянем» решение уравнений Максвелла, полученное наблюдателем при определенных начальных условиях, по области изменения физических параметров $n, w \neq const$, характеризующих физическую среду или измерительное устройство.

1.8. НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОБОБЩЕННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1. Сверхсветовые скорости электромагнитного поля в вакууме.

В вакууме $\rho = 0$ и потому $w = 0$. Групповая скорость поля

$$\vec{V}_g = c \frac{\vec{K}}{K} + \vec{U}_{fs}$$

зависит от скорости первичного источника излучения. Поверхность волнового фронта представляет собой сферу, так как $a = b = c_0 t$, а центр этой сферы перемещается со скоростью

$$\vec{U}_* = \vec{U}_{fs}.$$

Такая картина распространения излучения соответствует «баллистической» модели Ритца. Из-за взаимодействия со средой, в частности с реальным измерительным устройством (системой отсчета), скорость $\vec{U}_{fs}$ может "исчезнуть". Это происходит во всех случаях прямого измерения скорости света в вакууме [10].

Следует считать, что обобщенная модель электромагнитных явлений согласуется с "постоянством" скорости света в вакууме. Дополнительно она показывает, что для нахождения зависимости скорости света от скорости источника нужны только косвенные эксперименты, когда измерение не повлияет на величину $\vec{U}_{fs}$. Если излучение движется в гравитационном поле, оно тоже может влиять на частоту и скорость излучения. Это обстоятельство следует учитывать при анализе распространения излучения в космосе. Скорее всего, достаточно использовать значения $w = w_g \ll 1$, если гравитационное поле «слабо».

2. Сверхсветовые скорости в движущемся разреженном газе. Пусть источник излучения покоится относительно наблюдателя $\vec{U}_{fs} = 0$, а среда (поток газа) движется со скоростью $\vec{U}_m$. Тогда для групповой скорости поля получим

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) w \vec{U}_m.$$

Оптимальным, с точки зрения увлечения света средой, будет значение $w=0.5$. При показателе преломления, близком к единице, ему соответствует скорость

$$\vec{V}_g^{\max} = c \frac{\vec{K}}{K} + 0.25 \vec{U}_m.$$

Поскольку $n=1+Q_\lambda$, где $Q_\lambda \cong 10^{-4}$, в стандартной теории получим значение

$$\vec{V}_g \cong c_0 \frac{\vec{K}}{K}.$$

Очевидно существенное отличие предсказаний предлагаемой модели электромагнитных явлений от алгоритма, основанного на релятивистской кинематике. Указанные условия соответствуют опыту Физо, когда в качестве рабочей среды используется движущийся разреженный газ. Такой эксперимент может быть выполнен в самое близкое время. Согласно динамической модели изменения инерции электромагнитного поля, можно добиться, меняя разреженность движущегося газа, что полосы в интерферометре Физо станут двигаться, иллюстрируя сверхсветовые скорости.

3. Возможность движения материальных тел со скоростью света в вакууме.

Анализ динамики поперечного эффекта Допплера для случая малых относительных скоростей приводит к заключению, что при величине $w=1$ частота ω задается выражением

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Умножим его на величину $\hbar/c^2$, где $\hbar$ - постоянная Планка. Тогда получим зависимость для массы, используемую в релятивистской динамике:

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Предлагаемая модель динамического изменения инерции электромагнитного поля дает другое выражение для связи частот. Покажем это. Используем рассмотренную выше задачу о распространении излучения из вакуума в атмосферу Земли, формально полагая, что скорость $\vec{U}_{fs}$ стремится к величине, равной скорости света в вакууме. Ограничимся вариантом, когда достигнуто значение $w = 1$. Тогда $\vec{U} = 0$, $cK_z = n\omega_0$. Поскольку U_{fs}/c близко к единице, возьмем показатель преломления, отличный от единицы: $n = 1 + Q$, где $Q \ll 1$. Тогда получим систему уравнений вида

$$c^2 K_x^2 = n^2 (\omega^2 - \omega_0^2),$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{n}{c} U_{fs} (\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}.$$

Квадратное уравнение для частоты

$$\omega^2 - 2\omega\omega_0\sigma\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \omega_0^2\sigma\left(1 + \frac{U_{fs}^2}{c^2}\Psi\right) = 0$$

содержит множитель

$$\sigma = \left[1 - U_{fs}^2 (1 + \Psi) / c^2 \right]^{-1}, \quad \Psi = 2Q + Q^2, \quad n = 1 + Q.$$

Значение предельной частоты поля задается законом [11]:

$$\omega = \omega_0 \sigma \left[\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} - \frac{U_{fs}^2}{c^2} \Psi^{1/2} (1 + \Psi)^{1/2} \right].$$

Он не имеет особенности при скорости $U_{fs} \rightarrow c$. Тогда

$$\omega^* = \lim_{U_{fs} \rightarrow c} \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{\Psi} \right)^{1/2}.$$

Полагая, что масса пропорциональна частоте, получаем новую зависимость:

$$m = m_0 \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2} \right)^{1/2} - \frac{U^2}{c^2} \Phi^{1/2} (1 + \Phi)^{1/2}}{1 - \frac{U^2}{c^2} (1 + \Phi)}.$$

Понятно, что для построения данного выражения из геометрических представлений недостаточно риманова многообразия. Требуется использовать либо неметрические выражения для расстояния между точками в пространстве скоростей, либо метрику для системы многообразий.

Значение Φ следует находить опытным путем. В общем случае $\Phi \neq \Psi$. Заметим, что мы получили указанные выражения на основе решения квадратного уравнения, в котором обращается в ноль коэффициент при старшем многочлене. По этой причине оно будет сингулярным при скоростях, меньших ско-

рости света в вакууме. Чтобы исправить этот недостаток, найдем новую формулу, действуя стандартным способом. Получим для частоты выражение, несингулярное для скорости $U_{fs} = C$:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + \frac{U_{fs}^2}{C^2} \Psi}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{C^2}\right)^{1/2} + \sqrt{1 - \frac{U_{fs}^2}{C^2} - \left(1 + \frac{U_{fs}^2}{C^2} \Psi\right) \left(1 - \frac{U_{fs}^2}{C^2} (1 + \Psi)\right)}}$$

Аналогично запишется выражение для массы.

1.9. МЕХАНИЧЕСКИЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОЛЯ

Мы убедились, что при распространении излучения в разреженном газе от первичного источника, движущегося в вакууме со скоростью $\vec{U}_{fs}$, происходит динамическое изменение его групповой скорости $\vec{V}_g$ и частоты ω .

При малых относительных скоростях частота ω на конечной стадии динамического процесса отличается от начальной частоты ω_0 на величину

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0.5\omega_0 \frac{U_{fs}^2}{C^2}.$$

Умножим это выражение на постоянную Планка $\hbar$ и воспользуемся определением Эйнштейна для массы инерции фотона

$$m_{in} = \hbar \frac{\omega_0}{C^2}.$$

Введем следующие определения:

а) кинетическая энергия фотона, обусловленная скоростью первичного источника излучения, есть

$$E_{кин} = 0.5\hbar \frac{\omega_0}{c^2} U_{fs}^2,$$

б) потенциальная энергия фотона есть $\Delta U = \hbar(\omega - \omega_0)$.

Тогда получим $\Delta U = E_{кин}$. С физической точки зрения ситуация выглядит так: вначале фотон имел скорость $\vec{U}_{fs}$, дополнительную к скорости света в вакууме c , и частоту ω_0 . При взаимодействии со средой он "преобразовал" скорость $\vec{U}_{fs}$ в добавку к частоте $\Delta \omega$.

1.10. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим поведение электромагнитного поля в ситуациях, соответствующих разным значениям $w = const$. Запишем полную систему уравнений электродинамики в $R^3 \times T^1$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

$$\vec{D} + w[\vec{\beta} \times \vec{H}] = \varepsilon(\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]), \quad \vec{B} + w[\vec{E} \times \vec{\beta}] = \mu(\vec{H} + [\vec{D} \times \vec{\beta}]),$$

$$\vec{u}_{in} = (1-w)\vec{u}_{fx} + w\vec{u}_m, \quad \vec{\beta} = u_{in}/c,$$

$$w = 1 - \exp[-P_0(n-1)], \quad P_0 \approx 7 \cdot 10^4.$$

Здесь $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D})$ – поля и индукции, $(\vec{j}, \rho)$ – плотности токов и зарядов, $\vec{\beta} = \vec{u}_{in}/c$. Найдем ее решения для фиксированных значений показателя отношения $w = [0 \div 1]$. Им соответствует распространение излучения в вакууме, разреженном газе постоянной плотности или однородной "плотной" среде. Введем векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы, полагая

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Уравнения

$$L\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \left\{ \vec{j} + \frac{k\Gamma^2}{\chi + w} \frac{u_{in}}{c} (w\vec{u}_{in} \cdot \vec{j} - c^2 \rho) \right\},$$

$$L\varphi = -4\pi\mu \frac{\Gamma^2}{w + \chi} \left\{ \rho \left(1 - \varepsilon\mu \frac{u_{in}^2}{c^2} \right) + \chi \frac{\vec{u}_{in} \cdot \vec{j}}{c^2} \right\}$$

содержат

$$L = \left(\Delta - \frac{w}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \chi \frac{\Gamma^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_{in} \cdot \nabla \right)^2,$$

$$\chi = \varepsilon\mu - w, \quad \Gamma^2 = (1 - w\beta^2)^{-1}.$$

Условие калибровки вида

$$\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{w}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\chi \Gamma^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_{in} \cdot \nabla \right) (\vec{u}_{in} \cdot \vec{A} - c\varphi) = 0$$

упростило их. Проанализируем распространения излучения от δ - образного мгновенного источника. Найдем функцию Грина для уравнений, полагая, что среда не имеет дисперсии, а ось Z для цилиндрической системы координат направлена в соответствии со скоростью $\vec{u}_{in}$. Имеем

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4 \mu (r^2 + \xi^2)^{-1/2} \delta \left(t - \frac{1}{c} \frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}} (r^2 + \xi^2)^{1/2} \right),$$

$$\xi = z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} u_{in} t, \quad r^2 = \rho^2 \frac{\varepsilon\mu(1 - w\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

При значении $\beta = 0$ получим

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4 \mu \frac{1}{R} \delta \left(t - \frac{R\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \right),$$

где $R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ – расстояние от источника до точки наблюдения. В общем случае функция Грина отлична от нуля на эллипсоиде вращения, ось симметрии которого совпадает со скоростью $\vec{u}_{in}$. Анализ показал, что его центр перемещается со скоростью

$$u_0 = \frac{u_{in}(\varepsilon\mu - w)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Для групповой скорости поля в нерелятивистском приближении модель дает следующую зависимость от величин w , $\vec{u}_{fs}$, $\vec{u}_m$:

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{k}}{k} + \left(1 - \frac{w}{n^2} \right) [\vec{u}_{fs}(1 - w) + w\vec{u}_m].$$

Из анализа четырехметрик, которые входят в структуру уравнений электродинамики, следует, что метрика Евклида равноправна с метрикой Минковского. По этой причине становится возможным рассмотрение ситуаций, когда отношение становится отрицательным. Рассмотрим вариант, когда $w = -w_*$. Тогда получим, например, скорость

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n_*} \frac{\vec{k}}{k} + \left(1 + \frac{w_*}{n_*^2}\right) \left[\vec{u}_{fs} (1 + w_*) - w_* \vec{u}_m \right],$$

которая задает качественно новое поведение света. Вероятно, оно может реализоваться либо внутри частицы света, либо в особых условиях вне её.

Найдем решения обобщенной системы уравнений Максвелла при условии незначительного изменения параметров среды на расстояниях порядка длины волны. Тогда частота ω и волновой вектор $\vec{k}$ будут связаны дисперсионным уравнением вида

$$c^2 k^2 = w \omega^2 + \Gamma^2 (\varepsilon \mu - w) (\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_{in})^2.$$

Из него следует выражение для групповой скорости поля. Имеем

$$\vec{v}_g = c \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c \frac{\vec{k} + k \Gamma^2 c^{-2} \vec{u}_{in} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_{in})}{\frac{\omega w}{c} + k \Gamma^2 c^{-1} (\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_{in})}.$$

Рассмотрим распространения света в вакууме. Тогда

$$\vec{v}_\phi = \left\{ c + (1 - w) u \cos \Theta \right\} \frac{\vec{k}}{k}, \quad \vec{v}_g = \vec{c} + (1 - w) \vec{u}.$$

При $w=1$ скорость света не зависит от величины $\vec{u}$, при $w=0$ имеет место сложение скоростей по векторному закону. Величина $\xi=1-w$ дает меру влияния скорости $\vec{u}$ на скорость поля. В вакууме, из физических соображений, скорости $\vec{u}$ соответствует скорость движения источника поля. Если $w=1$, эта скорость не проявляется в экспериментах, если $w=0$, то ее можно обнаружить.

Рассмотрим теперь распространение электромагнитного поля в случае, когда происходит медленное изменение w . Будем считать, что справедливы материальные уравнения, полученные ранее. Пусть выполняется приближение геометрической оптики, в котором величины w , $\vec{k}$ локально постоянны. Выразим индукции через поля с точностью до членов третьего порядка по величине β :

$$\vec{B} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \mu(1 - w\beta^2)\vec{H} + (\epsilon\mu - w)[[\vec{E} \cdot \vec{\beta}] - \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{H})] \right\},$$

$$\vec{D} = \frac{1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \left\{ \epsilon(1 - w\beta^2)\vec{E} + (\epsilon\mu - w)[[\vec{\beta} \cdot \vec{H}] - \vec{\beta}(\beta \cdot \vec{E})] \right\}.$$

Заметим, что если $\epsilon = \mu = w=1$, отсюда следуют вакуумные связи, соответствующие группе Лорентца. Это физически бесмысленно, потому что при значении величин $\epsilon = \mu = 1$ не может быть выполнено условие $w=1$.

Заметим, что плотность энергии электромагнитного поля, выражаемая стандартной формулой

$$W = \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{B} + \vec{H}\vec{D}),$$

является сложной функцией, зависящей от скоростей, от показателя преломления n и показателя отношения w , что естественно предполагает изучение динамики частоты поля.

Рассмотрим случай малых скоростей с $\beta^2 \ll 1$. Тогда

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + [\vec{G} \times \vec{E}], \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} - [\vec{G} \times \vec{H}].$$

Здесь введено обозначение $\vec{G} = -(\mu\varepsilon - w)\vec{\beta}$. Получим для луча локальное дисперсионное уравнение

$$(\vec{k} - \vec{G})^2 = n^2,$$

где $\vec{k} = \nabla \psi$, ψ – эйконал, n – показатель преломления. Ему соответствует гамильтониан

$$H = 0.5[(\vec{K} - \vec{G})^2 - n^2].$$

Из уравнений Гамильтона-Якоби для H следует, что в области с изменением w касательный к лучу вектор $d\vec{r}/ds$ не параллелен градиенту эйконала, а изменение импульса определяется поведением $\vec{G}$.

Чтобы было более удобно анализировать частные случаи, преобразуем функцию Грина. Используем соотношение из теории δ -функций, полагая

$$\delta(f(t)) = \sum_s \frac{\delta(t - t_s)}{|f'(t_s)|},$$

$$f(t) = t - \frac{1}{c} \frac{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}} \left\{ \rho^2 \frac{\mu(1 - \mu\beta^2)}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} + \left(z - \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2} ut \right)^2 \right\}^{1/2},$$

$$f'(t) = \frac{df}{dt},$$

t_s – корень уравнения. Для корней имеем выражение

$$t_{1,2} = \frac{1 - (\varepsilon\mu - w)\beta z \pm \sqrt{\varepsilon\mu(1 - w\beta^2)} [z^2 + \rho^2(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - w\beta^2)]^{1/2}}{c(1 - \varepsilon\mu\beta^2)}$$

Значения $|f'(t_s)|$ оказываются одинаковыми. Имеем

$$|f'(t_1)| = |f'(t_2)| = a(z^2 + b(1 - a^2 z^2))^{1/2},$$

где

$$a = \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2 w^2)c^{-1}}{(1 - w\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad b = \frac{\varepsilon\mu - w}{\varepsilon\mu - \beta^2 w^2}.$$

Окончательный вид функции Грина запишем, используя функцию

$$\operatorname{sgn} a = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4 \mu \frac{0.5(1 + \operatorname{sgn} t_1)\delta(t - t_1) + 0.5(1 + \operatorname{sgn} t_2)(\delta(t - t_2))}{[z^2 + [(1 - \varepsilon\mu\beta^2)/(1 - w\beta^2)]\rho^2]^{1/2}}.$$

Множители перед δ – функциями обеспечивают выключение тех значений, для которых t_1 или t_2 становится отрицательным. Рассмотрим частные случаи, соответствующие различным значениям скорости $\vec{u}$ и фазовой скорости $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Вариант 1: Досветовые скорости при скорости $u < c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. После преобразований получим

$$G_0(\vec{r}, t) = 16\pi^4 \mu \delta(t - t_1) \left(z^2 + \frac{1 - \varepsilon \mu \beta^2}{1 - \beta^2 w} \rho^2 \right)^{-1/2}.$$

Вариант 2: Световое движение при скорости $u = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Тогда

$$t_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2c} \left[\left(1 + \frac{w}{\varepsilon\mu}\right) z + \frac{\rho^2}{2} \right], \quad t^2 = \infty.$$

Функция Грина

$$G_0(\vec{r}, t_1) = \frac{16\pi^4 \mu}{z} \delta(t - t_1).$$

1.11. АНАЛИЗ ПРИНЯТЫХ ДОПУЩЕНИЙ

Проведенный ранее анализ показал, что в электродинамике, учитывающей всю систему скоростей, а также факторов управления ими, возможно полное описание экспериментальных данных на основе прямого решения обобщенной системы уравнений Максвелла.

В качестве истока физических изменений принято введение в электродинамику новой физической величины. Она названа показателем отношения. Её использование позволяет описать динамическое изменение частоты электромагнитного поля. Кинематические и частотные свойства света подчинены разным уравнениям, асимптотики их решений разные.

Эти и другие обстоятельства поясняют, почему симметричный подход длительное время был основным средством анализа релятивистских эффектов. С одной стороны, потому, что он проще, для него не требуется менять уравнения Максвелла. С другой стороны, потому что он прагматичен, позволяя описать итог динамического процесса без анализа сущности и деталей динамики. В-третьих, для прямого решения проблем электродинамики.

намики требуется обобщить уравнения, используемые для описания электромагнитных явлений.

И сам путь соотношения экспериментальных данных с прямым решением уравнений электродинамики, и применяемые для этого средства нетривиальны. Однако прохождение сложной «полосы препятствий» оказывается не только возможным, но и полезным.

Рассмотрим всю систему предположений, используемых в электродинамике движущихся сред без ограничения скорости.

1. Система дисперсионных уравнений для электромагнитного поля имеет вид:

$$c^2 k^2 - w \omega^2 = \frac{(\varepsilon \mu - w)}{1 - w \frac{u^2}{c^2}} (\omega - \vec{k} \vec{u}), \quad \frac{\omega - \vec{k} \vec{u}_\xi}{\left(1 - w_\xi \frac{\vec{u}_\xi^2}{c^2}\right)} = const.$$

2. Введены разные скорости:

$$\vec{u} = (1 - w) \vec{u}_{fs} + w \vec{u}_m, \quad \vec{u}_\xi = \vec{u}_{fs} + w_\xi \vec{u}_m.$$

Здесь $\vec{u}_{fs}$ – скорость первичного источника излучения, $\vec{u}_m$ – скорость вторичного источника, w, w_ξ – показатели отношения, управляющие динамикой изменения частоты электромагнитного поля.

3. Использована пара показателей отношения: w, w_ξ с предположением, что скоростной w и частотный w_ξ показатели отношений совпадают. Тогда

$$w_\xi = w = 1 - \exp(-Q(\lambda)(n-1)).$$

Здесь ρ – плотность среды, $Q(\lambda)$ – величина, зависящая от длины волны излучения.

4. Для расчета показателя преломления использовано эмпирическое выражение

$$n = 1 + G(\lambda) \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Постоянная Гладстона-Дейла в оптическом диапазоне длин волн есть $G(\lambda) = 3 \cdot 10^{-4}$.

5. Рассмотрена модельная задача распространения излучения частоты ω_0 из вакуума в атмосферу Земли. Роль скорости первичного источника излучения $\vec{u}_{fs}$ выполняет скорость объекта, движущегося в космосе. Для упрощения расчета атмосфера покоится: $\vec{u}_m = 0$. Система координат, в которой проводится расчет явления, покоится относительно Земли.

6. Принято начальное условие вида

$$k_y = 0, k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

7. Из второго дисперсионного уравнения при $\vec{u}_\varepsilon = 0$ следует, что $const = \omega_0$. Тогда

$$\omega = \omega_0 \left(1 - w \frac{\vec{u}_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} + \vec{k} \vec{u}_{fs}.$$

Получены уравнения:

$$c^2 k^2 - w \omega^2 = \frac{(\varepsilon \mu - w)}{1 - w \frac{u^2}{c^2}} (\omega - \vec{k} \vec{u}),$$

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_0 \left(1 - w \frac{\vec{u}_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} + \vec{k} \vec{u}_{fs}, \\
\vec{u} &= (1 - w) \vec{u}_{fs} + w \vec{u}_m, \\
\vec{u}_\xi &= \vec{u}_{fs} + w \vec{u}_m, \\
w &= 1 - \exp(-Q(n-1)), \\
k_y &= 0, k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}, \\
Q_0 &\approx 10^5.
\end{aligned}$$

Для расчета динамики изменения компоненты волнового вектора k_x получено квадратное уравнение

$$A k_x^2 + B k_x + P = 0.$$

Его коэффициенты таковы:

$$\begin{aligned}
A &= 1 - \left(2w + (\varepsilon \mu - 2)w^2 + w^3 \right) \frac{u_{fs}^2}{c^2}, \\
B &= -2w(1 + \varepsilon \mu - w) \frac{\omega_0}{c} \frac{u_{fs}}{c}, \\
P &= \left(w^4 - (2 + \varepsilon \mu)w^3 + (2\varepsilon \mu + 1)w^2 \right) \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{u_{fs}^2}{c^2}.
\end{aligned}$$

Получим

$$k_x = w \frac{\omega_0}{c} \frac{u_{fs}}{c} \left(1 + \varepsilon \mu - w \pm \sqrt{(\varepsilon \mu - w)} \right)$$

Поскольку $\varepsilon \mu \approx 1$, функция, управляющая динамикой волнового вектора, получает вид

$$\hat{\Phi} \cong w \left((2-w) \pm (1-w)^{1/2} \right)$$

Угол абберации и закон динамического изменения частоты представятся формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \hat{\Phi} \varepsilon u \frac{u_{fs}}{c}, \\ \omega &= \omega_0 \left(\left(1 - w \frac{u_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} + \hat{\Phi} \frac{u_{fs}^2}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Когда $w=1$, что соответствует в симметричном подходе преобразованиям группы Лорентца, получаем экспериментально подтвержденные значения частоты ω и угла абберации α .

8. Для выбора знака в полученных выражениях перед квадратным корнем рассмотрено формальное решение системы дисперсионных уравнений для ситуации, когда скорость первичного источника излучения близка к скорости света, а величина $w=1$. Выражения без сингулярностей и мнимых значений получим, если перед корнем выберем знак минус:

$$\begin{aligned} k_x &= \varepsilon u \frac{\omega_0}{c} \frac{u_{fs}}{c} \frac{1 - \sqrt{1 + \varepsilon u} \frac{u_{fs}}{c}}{1 - (1 + \varepsilon u) \frac{u_{fs}^2}{c^2}} = \varepsilon u \frac{\omega_0}{c} \frac{u_{fs}}{c} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon u} \frac{u_{fs}}{c}}, \\ \omega &= \omega_0 \left(\left(1 - \frac{u_{fs}^2}{c^2} \right)^{1/2} + \varepsilon u \frac{u_{fs}^2}{c^2} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon u} \frac{u_{fs}}{c}} \right). \end{aligned}$$

Функция, в нерелятивистском приближении управляющая динамикой абберации и частоты для оптического диапазона длин

волн при распространении излучения из Космоса на Землю, задается выражением

$$\hat{\Phi} = w \left((2-w) - (1-w)^{1/2} \right)$$

Для новой переменной

$$\xi = (1-w)^{1/2}, w = 1 - \xi^2$$

получаем $\hat{\Phi} = -\xi^4 - \xi^3 + \xi + 1$. Подстановка $\xi = \eta - \frac{1}{4}$ преобразует $\hat{\Phi}$ к виду потенциальной функции катастрофы сборки:

$$\hat{\Phi} = \alpha \eta^4 + \beta \eta^2 + \gamma \eta + \delta.$$

9. Мы предполагаем, что как скоростные, так и частотные свойства электромагнитных явлений описываются одними и теми же обобщенными уравнениями Максвелла.

10. Соединим комплексные величины, характеризующие скоростные (внешние) и частотные (внутренние) стороны электромагнитных явлений, в единый комплекс посредством дуальной единицы $\sigma : \sigma^2 = 0$. Введем тензоры:

$$\hat{F}_{mn} = F_{mn} + \sqrt{\sigma} f_{mn}, \hat{H}^{ik} = H^{ik} + \sigma h^{ik}, \hat{\Omega}^{im} = \Omega^{im} + \sigma^{1/4} \omega^{im}.$$

Уравнения

$$\partial_{[k} \hat{F}_{mn]} = 0,$$

$$\partial_k \hat{H}^{ik} = s^i,$$

$$\hat{H}^{ik} = \hat{\Omega}^{im} \hat{\Omega}^{kn} \hat{F}_{mn}$$

преобразуются в систему:

$$\partial_{[k} F_{mn]} = 0, \partial_k H^{ik} = s^i, H^{ik} = \Omega^{im} \Omega^{kn} F_{mn}$$

$$\partial_{[k} f_{mn]} = 0, \partial_k h^{ik} = s^i, h^{ik} = \omega^{im} \omega^{kn} f_{mn}$$

11. Введём новую нормированную физическую величину ϕ . Отнесем скоростную часть модели электромагнитных явлений к значению $\phi = 0$ (частотная часть информации скрыта). Отнесем частотную часть к значению $\phi = 1$. Введем для каждой системы свое выражение для 4-потенциала $A(\phi)$.

12. Дополним уравнения для 4-потенциалов 4-током, пропорциональным 4-потенциалу

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega}^{ij} \partial_i \partial_j A_p(\phi) + \partial_p \left(\hat{\Omega}^{kn} \partial_k A_n(\phi) \right) + \\ & + B \frac{\phi}{\mu} (\varepsilon \mu - w) A_p(\phi) = s_p(\phi). \end{aligned}$$

13. Введем величину ϕ в тензор Ω^{ij} :

$$\hat{\Omega}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left((1 - \phi) \theta^{ij} + \left(\frac{\varepsilon \mu}{w} - 1 \right) u^i(\phi) u^j(\phi) \right),$$

14. Пусть

$$B = -\sqrt{w} B_0, B_0 = const.$$

15. Примем пару калибровочных условий вида

$$\Omega^{kn} \partial_k A_n(\phi = 0) = \omega^{kn} \partial_k A_n(\phi = 1) = 0.$$

Получим обобщенную систему дифференциальных уравнений:

$$\Omega^{ij} \partial_i \partial_j A_p (\phi = 0) = s_p (\phi = 0),$$

$$\left(\left(u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - B \frac{1}{\mu} \right) A_p (\phi = 1) = s_p (\phi = 1).$$

Используя выражения для четырехскоростей, пропорциональные $\sqrt{w}$, из последнего уравнения получим связь

$$\frac{\omega - k \vec{u}_{\xi}}{\left(1 - w \frac{u_{\xi}^2}{c^2} \right)^{1/2}} = c \frac{B_0}{\mu}.$$

Тогда решения для 4-потенциалов вида

$$A_p = A_{p0} \exp \left\{ i \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) \right\},$$

где i – мнимая единица, дают дисперсионные уравнения, указанные выше.

Уточним детали расчета, присущие данной задаче, обусловленные, во-первых, использованием тензорной плотности для индукций, а, во-вторых, тем обстоятельством, что переменными являются компоненты тензоров, связывающие поля и индукции.

16. Учтем сингулярность тензора θ_{ik} при значении $w = 0$, вытекающую из выражения

$$\tilde{\Lambda} = \det \theta_{ik} = \frac{1}{w}.$$

Введем $w \tilde{\Lambda} = \text{const}$ в обобщенную связь между полями и индукциями вида

$$\tilde{H}^{ij} = w \tilde{\Lambda} \Omega^{im} \Omega^{jn} F_{mn}.$$

Получим

$$\partial_k \tilde{H}^{ik} = \partial_k \left(w \tilde{\Lambda} \Omega^{im} \Omega^{kn} \right) \left(\partial_m A_n - \partial_n A_m \right) - w \tilde{\Lambda} \Omega^{im} \left(\partial_m \Omega^{kn} \right) \partial_k A_n + \\ + w \tilde{\Lambda} \Omega^{ip} \partial_p \left(\Omega^{kn} \partial_k A_n \right) - w \tilde{\Lambda} \Omega^{im} \left(\Omega^{kn} \partial_k \partial_n A_m \right) = w \tilde{\Lambda} s^i.$$

17. Оценим слагаемые, относящиеся к производным от симметричного тензора, связывающего поля и индукции, в нерелятивистском приближении. Потребуем независимости величин от времени. Обобщенный тензор Ω^{ij} в нерелятивистском приближении получает вид:

$$\Omega^{ij} \left(\frac{v}{c} \leq \varepsilon \right) \cong \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^1}{c} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^2}{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^3}{c} \\ i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^1}{c} & i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^2}{c} & i(\varepsilon\mu - w) \frac{v^3}{c} & \varepsilon \sqrt{\mu} \end{pmatrix}.$$

Исследуемые слагаемые получают форму:

$$\left(\partial_k \Omega^{kn} \right) \cdot \Omega^{im} \cong (\varepsilon\mu - w)^2 \left(\partial_k \frac{v^k}{c} \right) \frac{v^i}{c}, \\ \left(\partial_k \Omega^{im} \right) \cdot \Omega^{kn} \cong (\varepsilon\mu - w)^2 \left(\partial_k \frac{v^i}{c} \right) \frac{v^k}{c}.$$

Величины $\frac{v^k}{c}$ задают четырехскорости без релятивистского множителя.

Если скорость среды постоянна, как и скорость первичного источника излучения, то указанные слагаемые дают малый вклад в дисперсионное уравнение.

Слагаемые вида $\Omega^{im}(\partial_m \Omega^{kn})$ в нерелятивистском приближении либо нулевые, либо являются комплексными. В силу указанных обстоятельств основные уравнения для описания электромагнитных явлений в приближении нерелятивистских скоростей образуют систему вида

$$\Omega^{kn} \partial_k \partial_n A_p = s_p,$$

$$\Omega^{kn} \partial_k A_n = 0,$$

$$\Omega^{kn} \neq const.$$

В рассматриваемой задаче мы пользовались обобщенным тензором

$$\Omega^{kn} = \frac{1}{\mu} \left[\theta^{kn} + \left(\frac{\varepsilon \mu}{w} - 1 \right) u^k u^n \right]$$

при условиях

$$\theta^{kn} = diag(1, 1, 1, w), u^i = \frac{dx^i}{d\theta}.$$

Эти допущения соединены со следствиями, вытекающими из предложенного механизма релаксационного изменения параметров, характеризующих электромагнитные явления:

$$u^i = (1 - w)u_{fs}^i + wu_m^i \Rightarrow \phi = 0,$$

$$u^i = u_{fs}^i + wu_m^i \Rightarrow \phi = 1,$$

$$w = 1 - \exp\{-Q(n-1)\}.$$

Здесь u_{fs}^i – компоненты четырехскорости первичного источника излучения, u_m^i – компоненты четырехскорости среды.

Выражение для скорости электромагнитного поля, следующее из дисперсионного уравнения в случае $w = const$, в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\vec{v}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{k}}{k} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) \left[(1-w)\vec{u}_{fs} + w\vec{u}_m \right]$$

В случае нерелятивистских скоростей и покоящейся среды оно может использоваться как приближенное выражение для групповой скорости электромагнитного поля в случае переменного показателя отношения.

ВЫВОДЫ:

1. Возможно обобщение связей между полями и индукциями в электродинамике Максвелла, позволяющее учитывать все инерциальные факторы. Оно, во-первых, не использует специальной теории относительности, во-вторых, базируется на пространстве Ньютона, в-третьих, допускает сверхсветовые скорости и указывает условия, где и как их обнаружить, в-четвертых, описывает известные экспериментальные факты, дополнительно задавая динамику инерционных параметров электромагнитного поля.

2. Согласно предлагаемому варианту эффекты Бредли, Майкельсона, Физо, Допплера имеют динамическую природу.

3. Специальная теория относительности корректно связывает между собой начальные и конечные значения динамических процессов, соответствуя алгоритму модели черного ящика, поэтому она верна настолько, насколько пригоден указанный алгоритм.

4. Существует динамический механизм преобразования скорости первичного источника излучения в частоту электромагнитного поля из-за взаимодействия его со средой, при котором выполняется "механический" закон сохранения энергии.

5. Скорость света в движущемся разреженном газе может превысить скорость света в вакууме.

6. Скорость электромагнитного поля в вакууме не ограничена своим предельным значением c , но, чтобы измерить ее,

нужно учесть влияние измерительного устройства на поле и тех условий, в которых распространяется поле.

7. Модель предсказывает возможность движения тел ненулевой массы со скоростью света в вакууме.

2. К ЕДИНСТВУ МАКРОТЕЛ И ЧАСТИЦ СВЕТА

Укажем новые элементы физической теории, необходимые для построения единой дифференциально-геометрической модели для макротел и для частиц света.

Принято считать, что макроскопические тела и предполагаемые частицы света существенно отличаются друг от друга. Это различие проявляется как в свойствах зарядов, так и в их поведении: тела имеют массу, а у частиц света ее нет, то же самое можно сказать о размерах, о структуре, о взаимодействии. Анализ показывает, что ситуация на самом деле иная. Макротела и частицы света сущностно едины. Это касается всех пунктов, по которым указано выше их различие.

2.1. НЕНУЛЕВАЯ МАССА МОЖЕТ СТАТЬ НУЛЕВОЙ

Из многочисленных экспериментов следует, что динамика частиц света реализуется через согласованное изменение их параметров, например, скоростей, частот, интенсивностей, поляризации и т.д. Обычно они согласованы с длиной волны излучения. Попробуем описывать частицы света аналогично описанию макроскопических тел. Учтем, что световые частицы изготовлены из праматерии, а материальные тела из атомов и молекул. Поэтому будем предполагать различие моделей. Оно может быть как формальным, так и сущностным. Было бы желательно получить уравнения, способные единым образом описывать как материальные физические макротела, привычные для обыденной практики, так и световые частицы, многие стороны и свойства которых пока неизвестны. Укажем черты нового опыта, индуцируемые анализом в рамках электродинамики движущихся сред без ограничения скорости [11].

Используем дифференциально-геометрический подход. Рассмотрим уравнение геодезических линий в физическом пространстве-времени:

$$\alpha^2 \frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} - F^i(2) = 0.$$

Примем точку зрения, что каждое ранговое движение: размер, скорость, ускорение... характеризуются своим «динамическим» уравнением. Для ускорений оно указано выше. Для скоростей можно использовать уравнение вида

$$\alpha \frac{dx^i}{d\sigma} + B^i_{jk} l^j l^k - f^i(1) = 0.$$

Если мы желаем рассматривать ранговые движения более высоких порядков, то соответствующие дифференциальные уравнения «геодезических» будут содержать производные более высоких порядков. Например,

$$\alpha^2 \frac{d^3 x^i}{d\sigma^3} + \Gamma_{jk}^i \frac{d^2 x^j}{d\sigma^2} \frac{d^2 x^k}{d\sigma^2} - F^i(3) = 0.$$

Отметим, что интервал $d\sigma$ может быть нериманов, а связности B^i_{jk}, Γ^i_{jk} могут быть неметрическими и дополняться тензорными добавками. Если

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \sigma = c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 w \right)^{1/2} dt, \alpha^2 = m_0^*,$$

получим

$$\frac{m_0^*}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 w\right)^{1/2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{cdt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 w\right)^{1/2}} \right) = F^i.$$

Примем зависимость вида

$$m_0^* = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} n^2 w\right)^{1/2}.$$

Следовательно, ненулевая масса способна стать нулевой при определенной скорости из-за взаимодействия с праматерией, по-видимому, тогда, когда скорость тела становится сравнимой со скоростью звука в праматерии. Эта динамика массы скрыта при использовании уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 dx^i}{cdt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) = F^i.$$

Они следуют из релятивистского закона преобразования скоростей при условиях $n=1, w=1$. Так обычно «выводятся» уравнения релятивистской динамики. В частности, так действовал Эйнштейн. Мы предполагаем, что пространство ускорений может быть очень сложным и по-разному согласовано с пространством скоростей. Поэтому возникают новые возможности, которые следует проанализировать.

Нами рассмотрен вариант формального продолжения динамики. Он основан на концепции геодезических линий в расслоенном пространстве. Его базой является физическое простран-

ство размеров, а слой задается римановым пространством скоростей.

Из физических соображений следует, что ненулевая масса может стать нулевой из-за взаимодействия тела с праматерией, когда характерные скорости тела близки к скоростям «звука» в праматерии.

2.2. СВЕРХСВЕТОВЫЕ СКОРОСТИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Рассмотрим проблему сверхсветовых скоростей в движущемся разреженном газе в рамках обобщенной электродинамики. Пусть источник излучения покоится относительно наблюдателя $\vec{U}_{fs} = 0$, а поток газа движется со скоростью $\vec{U}_m$. Тогда из уравнений новой модели для групповой скорости поля следует выражение, зависящее как от показателя преломления n , так и от показателя отношения w :

$$\vec{V}_g = \frac{c}{n} \frac{\vec{K}}{K} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) w \vec{U}_m.$$

Оптимальным, с точки зрения увлечения света средой, будет значение $w = 0.5$. При показателе преломления, близком к единице, ему соответствует скорость

$$\vec{V}_g^{\max} = c \frac{\vec{K}}{K} + 0.25 \vec{U}_m.$$

Согласно Эйнштейну получим значение

$$\vec{V}_g \cong c_0 \frac{\vec{K}}{K}.$$

Очевидно существенное отличие предсказаний предлагаемой модели электромагнитных явлений от алгоритма, основанного на релятивистской кинематике. Указанные условия соответствуют опыту Физо, когда в качестве рабочей среды используется движущийся разреженный газ. Следуя динамической модели изменения инерции электромагнитного поля, можно добиться, меняя разреженность движущегося газа, что полосы в интерферометре Физо станут двигаться, иллюстрируя сверхсветовые скорости.

Для нашей цели общего анализа уравнений динамики здесь важно отметить обнаруженную потребность дополнения показателя преломления показателем отношения. Эта пара естественно обязана входить в метрику и задавать связность риманова пространства скоростей. Более того, эта пара активна, что вносит дополнительные осложнения и препятствует формальному построению физической модели. Только в сочетании с физическим анализом ситуации мы способны придти к реалистичной модели. Кроме этого, сами параметры симметрии зависят от показателя отношения, что делает задачу нелинейной. В общем случае рассмотрения реальных физических частиц света задача становится еще и нелокальной. Понятно, что указанный подход отражает лишь черты линейной электродинамики и потому требуется обстоятельный анализ нелинейной электродинамики.

2.3. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ НЕДОСТАТОЧНА ДЛЯ ФИЗИКИ СВЕТА

Проанализируем динамику поперечного эффекта Допплера в соответствии с обобщенными уравнениями электродинамики Максвелла. При малых относительных скоростях новая модель, при значении показателя отношения $w = 1$, дает для частоты ω выражение

$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Умножим его на величину $\hbar/c^2$, где $\hbar$ - постоянная Планка. Тогда получим выражение для массы, используемое в классической релятивистской динамике:

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Новая модель динамического изменения инерции электромагнитного поля дает другое выражение для закона изменения частоты при больших относительных скоростях. Покажем это. Рассмотрим задачу о распространении излучения из вакуума в атмосферу Земли, формально полагая, что скорость $\vec{U}_{fs}$ стремится к величине, равной скорости света в вакууме. Ограничимся вариантом, когда достигнуто значение $w=1$. Тогда $\vec{U} = 0$, $cK_z = n\omega_0$. Поскольку U_{fs}/c близко к единице, возьмем показатель преломления, отличный от единицы: $n=1+Q$, где $Q \ll 1$. Получим систему уравнений вида

$$c^2 K_x^2 = n^2 (\omega^2 - \omega_0^2),$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{n}{c} U_{fs} (\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}.$$

Квадратное уравнение для частоты

$$\omega^2 - 2\omega\omega_0\sigma\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \omega_0^2\sigma\left(1 + \frac{U_{fs}^2}{c^2}\Psi\right) = 0$$

содержит множитель

$$\sigma = \left[1 - U_{fs}^2(1 + \Psi)/c^2\right]^{-1},$$

$$\Psi = 2Q + Q^2, \quad n = 1 + Q.$$

Значение предельной частоты поля

$$\omega = \omega_0\sigma\left[\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\Psi^{1/2}(1 + \Psi)^{1/2}\right].$$

не имеет особенности при условии, что $U_{fs} \rightarrow c$. Тогда

$$\omega^* = \lim_{U_{fs} \rightarrow c} \omega = \omega_0\left(1 + \frac{1}{\Psi}\right)^{1/2}.$$

Полагая, что масса пропорциональна частоте, получаем новую зависимость:

$$m = m_0 \frac{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{U^2}{c^2}\Phi^{1/2}(1 + \Phi)^{1/2}}{1 - \frac{U^2}{c^2}(1 + \Phi)}.$$

Величину Φ следует находить опытным путем. В общем случае $\Phi \neq \Psi$. Заметим, что мы получили указанные выражения на основе решения квадратного уравнения, в котором обращается в ноль коэффициент при старшем многочлене. По этой причине оно кажется сингулярным при скоростях, меньших скорости

света в вакууме. Чтобы исправить этот недостаток, найдем новую формулу. Получим для частоты выражение, несингулярное при значении скорости $U_{fs} = c$:

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + \frac{U_{fs}^2}{c^2} \Psi}{\left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2}\right)^{1/2} + \sqrt{1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2} - \left(1 + \frac{U_{fs}^2}{c^2} \Psi\right) \left(1 - \frac{U_{fs}^2}{c^2} (1 + \Psi)\right)}}.$$

Аналогично запишется выражение для массы. Оно требует качественно нового выражения для метрики, которое выходит за рамки модели риманова пространства.

2.4. ФИЗИКА УПРАВЛЯЕТСЯ СЕМЕЙСТВОМ ЧЕТЫРЁХМЕТРИК

Спинорная форма уравнений электродинамики свидетельствует о потребности в семействе четырехметрик для описания электродинамических явлений. Метрика Минковского в новой модели дополнена метрикой Евклида. Есть также ещё две метрики: Ньютона и Барыкина.

Следует отметить, что четырехметрику следует считать вторичным математическим объектом. Она ассоциирована, например, с группой заполнения и физическим пространством отдельного наблюдателя.

2.5. СКОРОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИ ПРЕОБРАЗУЕТСЯ В ЧАСТОТУ

Рассмотрим механический закон сохранения энергии для частицы света, изготовленной из праматерии.

При распространении излучения в разреженном газе от первичного источника, движущегося в газовой среде со скоро-

стью $\vec{U}_{fs}$, происходит динамическое изменение его групповой скорости $\vec{V}_g$ и частоты ω . При малых относительных скоростях частота ω на конечной стадии динамического процесса отличается от начальной частоты ω_0 на величину

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 0.5\omega_0 \frac{U_{fs}^2}{c^2}.$$

Умножим это выражение на постоянную Планка $\hbar$ и воспользуемся определением Эйнштейна для массы инерции фотона

$$m_{in} = \hbar \frac{\omega_0}{c^2}.$$

Введем следующие определения:

а) кинетическая энергия фотона, обусловленная скоростью первичного источника излучения, есть

$$E_{kin} = 0.5\hbar \frac{\omega_0}{c^2} U_{fs}^2,$$

б) потенциальная энергия фотона есть

$$\Delta U = \hbar(\omega - \omega_0).$$

Тогда

$$\Delta U = E_{kin}.$$

С физической точки зрения ситуация выглядит так: вначале фотон имел скорость $\vec{U}_{fs}$, дополнительную к скорости света в ва-

кууме c , и частоту ω_0 , при взаимодействии со средой он "преобразовал" скорость $\vec{U}_{fs}$ в добавку к частоте $\Delta \omega$.

2.6. ПОСТОЯННАЯ ПЛАНКА МОЖЕТ МЕНЯТЬСЯ ДИСКРЕТНО

Структурность частиц света вносит изменения в представление о постоянных величинах, используемых в электродинамике. Ранее это показано для скорости света.

Примем точку зрения, что частица света состоит из некоторого количества элементарных частиц света. Пусть каждая составляющая имеет одну и ту же частоту вращения. Тогда постоянная Планка может зависеть от количества элементарных составляющих. Этот результат получится, если рассчитать энергию частицы света согласно формулам

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega, E = \hbar \omega = \sum N \left(\frac{\hbar}{N} \omega \right), \hbar_N = \frac{\hbar}{N}$$

Он качественно отличается от известного варианта, в котором отсутствует допущение о структурных составляющих для частиц света. Мы понимаем, что частица со структурой обязана иметь систему разных энергий: поступательных, вращательных, колебательных. Возникает задача определения этих составляющих в энергии структурных частиц света (нотонов), а также способов их анализа и применения.

Предварительно рассмотрим задачу моделирования движений внутри частицы света. Сопоставим между собой формулы для энергии частицы света, полученные Томсоном и Гейзенбергом.

Согласно Гейзенбергу, в варианте представления частицы света в форме линейной молекулы, образованной из отдельных блоков, связанных между собой, получим

$$E(G) = N \frac{\hbar}{N} (N\omega_0),$$

где N – число блоков, из которых состоит молекула света, ω_0 – частота вращения в каждом отдельном блоке. В этой формуле заложены два физических механизма трансформации частиц света. С одной стороны, частота ω есть сумма частот начальных блоков. Это означает, что блоки, вращающиеся медленно, при соединении в систему начинают вращаться с указанной аддитивной скоростью. С другой стороны, заложен механизм дискретного изменения «постоянной» Планка. Чем больше элементарных блоков соединено в частице света, тем «ближе» к классическому объекту каждый элементарный блок. «Приписывание» частице света неизменной постоянной Планка означает ее моделирование локальным бесструктурным квантом вместо того, чтобы рассматривать ее как систему, состоящую из классических объектов.

Согласно Томсону, энергия частицы света задается формулой вида

$$E(T) = 8\pi^2 \left(p \frac{r}{b} \right)^2 \frac{e^2}{\varepsilon_0 c} \left(\frac{c}{2\pi r} \right).$$

Здесь r – радиус поперечного сечения частицы света, b – радиус силовой трубки для поперечного сечения, e – заряд, содержащийся в силовой трубке, ε_0 – диэлектрическая проницаемость, c – скорость вращения периферической силовой трубки вокруг гравитационной силовой трубки

Сопоставляя указанные формулы, примем модель, согласно которой все частицы света получаются из элементарных базовых блоков. У базового блока характеристики определим символом единица в круглых скобках.

Рассмотрим, как может меняться скорость периферической части при увеличении числа блоков N . Примем модель, согласно которой $e(N) = Ne(1)$. Потребуем, чтобы

$$\frac{1}{N} \frac{e^2(N)}{c(N)} = \frac{e^2(1)}{c(1)}.$$

Получим

$$c(N) = Nc(1).$$

Тогда можно оценить $c(1)$. Она выразится через скорость света в вакууме c_0 , и через максимальное число блоков в частице света, обозначенное числом N_0 . Получим

$$c(1) = \frac{c_0}{N_0}, \quad c(N) = c_0 \frac{N}{N_0}.$$

Частота

$$\omega = \omega(N) = \frac{c(N)}{r(N)} = c_0 \frac{N}{N_0} \frac{1}{r(1)} \frac{r(1)}{r(N)} = N\omega(1) \frac{r(1)}{r(N)}.$$

При условии $\omega(N) = N\omega(1)$ получим условие вида $r(N) = r(1)$. При увеличении длины молекулы света ее поперечные сечения остаются постоянными.

Ранее нами была принята модель, согласно которой соединения «дисков» между собой реализуются за счет силовых линий, из которых образованы «поперечные» диски. Тогда выполняются соотношения:

$$(N + 2C_2^N) b^2(N) = Nb^2(1) = N^2b^2(N).$$

Значит,

$$b(N) = \frac{b(1)}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

Примем условие

$$p(N) \frac{r(N)}{b(N)} = p(1) \frac{r(1)}{b(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$p(N) = \frac{p(1)}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

Значит, с увеличением количества «дисков» происходит размывание силовых линий.

2.7. У ЧАСТИЦ СВЕТА МОГУТ БЫТЬ ДИНАМИЧЕСКИЕ РАЗМЕРЫ

Будем считать возможным единое описание макротел и частиц света – нотонов. Найдем уравнения для динамики размеров исследуемых частиц. Примем в качестве физического фактора непрерывную функцию N , зависящую от числа базовых частиц («кирпичей») n , из которых составлено изучаемое реальное изделие. Примем соответствие системы различных качеств, например, движений и размеров, для физической конструкции. Будем считать, что движения подчинены динамическим уравнениям второго порядка для размеров $l^i, i=1,2,3$ исследуемых изделий вида

$$\alpha^2 \frac{d^2 l^i}{dN^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dl^j}{dN} \frac{dl^k}{dN} + Q^i = 0.$$

В рассмотрение введена качественно новая геометрия размеров изделия, зависящая от числа составляющих, входящих в него. Понятно, что если составляющие разные, то уравнения

будут значительно сложнее. Нами принята точка зрения, что размеры L физической конструкции следует связать с числом n составляющих, из которых она изготовлена

Для примера рассмотрим уравнения

$$\frac{d^2 L^i}{dN^2} + \beta_j^i \left(\frac{dL^i}{dN} \pm \frac{L^i}{N} \right) = 0.$$

Изучим простые варианты:

$$1. y'' + \beta y' - \beta \frac{y}{x} = 0.$$

Общее решение примет вид

$$y = (C_2 + C_1 \int x^{-2} e^{-\beta x} dx) x.$$

Размер конструкции пропорционален числу частиц, входящих в нее и зависит от суммы двух слагаемых, указанных в скобках.

$$2. y'' + \beta y' + \beta \frac{y}{x} = 0.$$

$$y = (C_2 + C_1 \int x^{-2} e^x dx) x \exp(-\beta x).$$

При частном условии $C_1 = 0$ получим выражение $y = C_2 x \exp(-\beta x)$. Оно аналогично распределению молекул по скоростям Максвелла, хотя описывает зависимость размеров от числа частиц.

2.8. СИЛА СПОСОБНА ВЫРАЖАТЬ СОСТАВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ

Покажем возможность применения алгоритма, учитывающего число частиц, в теории гравитации. Рассмотрим уравнение

для гравитационной силы F , действующей на тело, полагая, что она зависит от функционала, зависящего от числа частиц, которые достигли одного массивного физического тела, будучи испущенными от другого массивного тела. Пусть выполняется уравнение для силы

$$\frac{d^2 F}{dN^2} + \beta \frac{dF}{dN} = \beta \frac{F}{N}.$$

Оно имеет частное решение

$$F = \text{const} N.$$

Если $N = \frac{N_0}{\pi r^2}$, $N_0 \approx M_0$, $\text{const} = \gamma \pi m_1$, получим аналог закона взаимного притяжения Ньютона

$$F = \gamma \frac{m_1}{r^2} M_0.$$

Так обнаруживается еще одно соответствие: пространству движений и размеров соответствует пространство взаимодействий.

Гравитационное взаимодействие становится зависимым от числа испускаемых частиц, пропорциональных массе и числу приемников этих частиц, пропорциональных другой массе. В данной формуле, которая физически кажется очевидной, есть основы задания алгоритма описания взаимодействия, имеющего динамическую природу. Формула показывает, что вариант, предложенный Ньютоном, соответствует частному физическому случаю. В нём не учитывается возможность различия частиц излучения по свойствам и спектральному составу, не учтены свойства среды, промежуточной между массами. В нём нет учета скоростей и ускорений для масс.

2.9. К НОВОЙ КОНЦЕПЦИИ ЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Анализ структуры фундаментальных физических моделей привел нас к заключению, что они могут быть записаны на ос-

нове канонической мономиальной группы, имеющей размерность 4×4 . С теоретической точки зрения так может быть потому, что физические модели задаются в четырехмерном пространстве-времени. Для него удобно использовать матрицы указанной размерности. С физической точки зрения мы можем интерпретировать матрицы размерности 4×4 как систему отношения между четырьмя объектами.

В рамках развиваемого подхода на их роль претендуют, согласно структурной модели нейтральных частиц света, пара гравитационных предзарядов, обозначенных $\pm g$, а также пара электрических предзарядов, обозначенных $\pm q$. Канонические отношения между ними, выражаемые числами $(-1, 0, 1)$, конкретизируют систему матриц, используемых в физических моделях. Тогда физика базируется на системе отношений между четверкой базовых физических предзарядов.

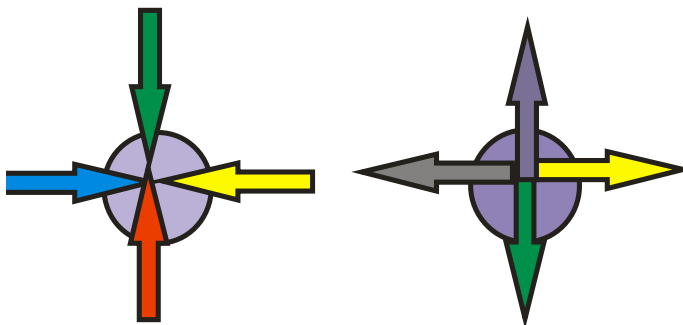
Эти слова остаются пока только формальным пояснением ситуации. Для того, чтобы продвинуться к пониманию физики, нужны модели предзарядов. Будем рассматривать их в форме изделий, изготовленных из атонов: ориентированных струн, имеющих поперечную структуру. Пусть они имеют активный обмен с праматерией.

Гравитационные предзаряды представим в форме « лепестков роз », имеющих поперечные соединения. Если ориентация направлена к центру « лепестков », назовем это изделие отрицательным предзарядом. У положительного гравитационного предзаряда поперечные соединения ориентированы от центра « лепестков ».

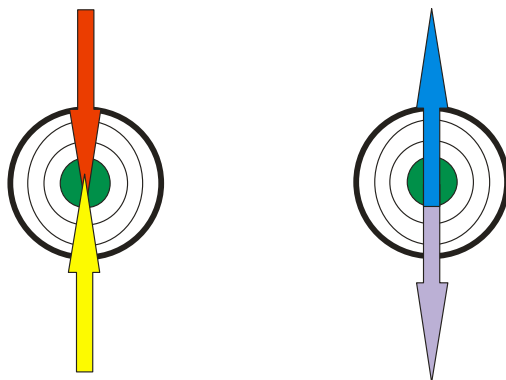
Согласно основному допущению, силовые линии способны соединяться, образуя тор. Рассмотрим пару разных гравитационных предзарядов, полагая, что они отталкиваются. Чтобы понять этот факт с точки зрения обмена с праматерией, нам нужно предположить, что между разными предзарядами праматерия усваивается лучше, чем вне предзарядов. Можно предположить, что рецепторы между ними раскрыты больше, чем снаружи. У одинаковых предзарядов силовые линии могут быть лучше раскрыты вне предзарядов, что приводит к эффекту их притяжения из-за лучшего поступления праматерии.

Для электрических предзарядов ситуация выглядит иначе. Представим их в виде системы «шипов» с ориентацией к центру шипов или от их центра.

Примем наглядную структурную модель для электрических и гравитационных предзарядов:



Представление пары электрических предзарядов



Представление пары гравитационных предзарядов

Интуиция подсказывает возможность нового понимания сути физической реальности: есть базовые объекты, из которых получаются все остальные.

На любом уровне материи они образованы из ориентированных одномерных объектов, способных к продольным и поперечным соединениям.

Примем модель взаимодействия, основанную на их обмене с праматерией. Если предзаряды одинаковы, то рецепторы между предзарядами могут быть открыты лучше и лучше втягивают в себя праматерию, чем рецепторы, которые находятся вдали от линии связи. Если же предзаряды различны, то лучше раскрываются и втягивают в себя праматерию внешние рецепторы, что приводит к эффекту притяжения предзарядов.

Из этих объектов формируются заряды на других уровнях материи. Физические объекты содержат систему предзарядов. В зависимости от того, как они устроены и в каких внешних условиях находятся, мы имеем разные взаимодействия.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАКСВЕЛЛА В СПИНОРНОЙ ФОРМЕ

Введем

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi^* = \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_k = \left\{ \partial_x, \partial_y, \partial_z, (-i)\frac{1}{c}\partial_t \right\}, \quad \partial_k^* = \left\{ \partial_x, \partial_y, \partial_z, i\frac{1}{c}\partial_t \right\},$$

$$U^k = \left\{ \frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, i \right\},$$

$$U^k = \left\{ \frac{U_x}{c}, \frac{U_y}{c}, \frac{U_z}{c}, -i \right\}, \quad g^{kn} = g_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, 1),$$

$$r^{kn} = r_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, -1).$$

Используем

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, a^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы можем выразить их через каноническую мономиальную группу, умножив ее элементы на знаковую группу. Действительно, получим

$$e^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем

$$a^1 = \text{col } (-, +, -, +)e^1, a^2 = \text{col } (-, -, +, +)e^2,$$

$$a^3 = \text{col } (+, -, -, +), a^4 = \text{col } (+, +, +, +)e^4,$$

$$b^1 = \text{col } (+, +, -, -)e^1, b^2 = \text{col } (-, +, +, -)e^2,$$

$$b^3 = \text{col } (+, -, +, -), b^4 = \text{col } (+, +, +, +)e^4.$$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для F_{mn} и H_{mn} в форме

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & D_z & -D_y & iH_x \\ -D_z & 0 & D_x & iH_y \\ D_y & -D_x & 0 & iH_z \\ -iH_x & -iH_y & -iH_z & 0 \end{pmatrix}$$

получим

$$F_{mn} = \frac{i}{2}(a^k \Pi_k \Psi^* - b^k \Pi_k \Psi),$$

$$H_{mn} = \frac{-i}{2}(a^k \Pi_k \varphi - b^k \Pi_k \varphi^*).$$

Легко записать в спинорной форме уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = 0.$$

Действительно, с точностью до оператора проектирования P , получим

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{(-i)}{c} \partial_t \right\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{i}{c} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Аналитически они выглядят так:

$$(a^k \partial_k \Psi^* + b^k \partial_k^* \Psi) P = 0, P = \text{column}(1, 1, 1, 1).$$

Введем

$$\Phi = \text{column}(2\rho U_x, 2\rho U_y, 2\rho U_z, -2i\rho)4\pi.$$

Тогда уравнения

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + 4\pi \frac{\vec{j}}{c}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

получат аналогичную форму

$$(a^k \partial_k^* \phi^* + b^k \partial_k \phi) P = \Phi.$$

Отметим, что уравнения Максвелла «нечувствительны» к умножению слева на мономиальные матрицы. Так, если умножить уравнения Максвелла на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим матричные уравнения

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{(-i)}{c} \partial_t \right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_z + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{i}{c} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Они тождественны указанным выше векторным уравнениям. Аналогично можно показать, что уравнения не изменятся, если умножить их слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, простейшим способом можно показать, что уравнения Максвелла инвариантны как относительно группы Лорентца, так и относительно группы Галилея.

Запишем в спинорной форме материальные уравнения:

$$\vec{B} + w[\vec{E} \times (\vec{u}/c)] = \mu(\vec{H} + [\vec{D} \times (\vec{u}/c)]),$$

$$\vec{D} + w[(\vec{u}/c) \times \vec{H}] = \varepsilon(\vec{E} + [(\vec{u}/c) \times \vec{B}]).$$

Получим

$$i\mu \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_z}{c} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-i) \right\} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} H_x - iD_x \\ H_y - iD_y \\ H_z - iD_z \\ 0 \end{pmatrix} - i\mu \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_z}{c} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (i) \left\{ \begin{pmatrix} H_x + iD_x \\ H_y + iD_y \\ H_z + iD_z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = w \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_x}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_y}{c} + \right. \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & w^{-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{U_z}{c} + \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (i) \left\{ \begin{pmatrix} E_x - iB_x \\ E_y - iB_y \\ E_z - iB_z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + w \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ w^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_x}{c} + \right. \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{U_y}{c} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & -w^{-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{U_z}{c} + \frac{1}{w} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-i) \left\{ \begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Если ввести

$$G_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, w^{-1}), \quad R_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, -w^{-1}),$$

$$\tilde{a}^k = Q^{-1} a^k Q, \quad \Pi^k = g^{kn} \Pi_n,$$

$$Q^{-1} = \text{diag}(1, 1, 1, w), \quad \tilde{b}^k = Q^{-1} b^k Q, \quad a_k = a^k,$$

$$b_k = b^k, \quad U_k = g_{kn} U^k,$$

можно записать

$$i \mu (b^k U_k^* \phi^* - a^k U_k \phi) P = w G_{kn} \left(\tilde{a}^k U^n \Psi^* + \tilde{b}^k U^n \Psi \right) P,$$

$$i \varepsilon (b^k U_k \Psi^* - a^k U_k^* \Psi) P = w R_{kn} \left(\tilde{a}^k U^{*n} \phi^* + \tilde{b}^k U^n \phi \right) P.$$

Если мы желаем записывать уравнения на основе канонической мономиальной группы, мы вправе использовать тензор четвертого ранга g^i_{jk} вместо метрического тензора g_{jk} . Это изменение кажется простым с математической точки зрения. С физической точки зрения оно достаточно сложно, так как означает, что метрика «теряет» свое первичное значение.

4. ГРУППА ЗАПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

При анализе фундаментальных аспектов физики постепенно сформировалась точка зрения, что для физических моделей необходимо использовать группу заполнения. На её основе модели явлений задаются в форме симметричного модуля.

В четырехмерном пространстве-времени для описания физических законов используется проективная унимодулярная группа $PSL(4)$ с размерностью матриц 4×4 , совпадающей с размерностью пространства-времени. Следовательно, при моделировании физических явлений (а мы полагаем аналогично описывать и базовые физические изделия) может использовать допущение, что размерность матриц группы заполнения равна размерности многообразия, в котором реализуется физическое моделирование:

$$\dim V = N \Leftrightarrow \text{mat} N \times N.$$

Примем предположение, что физический мир обладает фундаментальными свойствами, столь же общими, как пространство и время. В качестве примера можно указать показатель отношения, введенный в электродинамику Максвелла без ограничения скорости. На его свойствах базируется динамическая модель релятивистских эффектов.

В силу обоснованной ранее симметричной структуры физических моделей, основанной на группе заполнения, увеличение размерности пространства фундаментальных свойств можно

выразить через увеличение размерности матриц, используемых в теории. При одномерном фундаментальном расширении физических моделей базовым средством моделирования становятся матрицы размерности 5×5 .

Рассмотрим свойства такой совокупности на примере мономиальной группы. Зададим систему мономиальных матриц со значимыми элементами, равными единице. Они образуют группу, которую будем называть канонической мономиальной группой.

4.1. СВОЙСТВА МОНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Размерность 1. Имеем как мультипликативную, так и аддитивную группы, которые состоят из нулей. Есть также мультипликативная группа, состоящая из единиц. Соответствия между ними нет.

Размерность 2×2 . Имеем пару матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разобьем совокупность на две качественно разных сущности. Единичные матрицы задают группу. Совокупность других матриц образует класс элементов, напоминающий «полочку» факторгруппы.

Размерность 3×3 . Получим мономиальные матрицы комбинаторно двумя способами.

Согласно первому способу будем двигать единицу по верхней строке матриц 3×3 , располагая в остающихся местах указанную пару матриц размерности 2×2 . Получим, соответственно

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Назовём такой способ получения матриц горизонтальной сдвиг-деформацией. Согласно второму способу получим матрицы размерности 3×3 , двигая единицу вертикально и заполняя свободные места матрицами размерности 2×2 . Назовём такой способ получения матриц вертикальной сдвиг-деформацией.

Получим

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта совокупность совпадает с предыдущей совокупностью.

Матрицы распределятся, например, следующим образом: единичные матрицы образуют группу A . Матрицы b, c, f образуют одинарные «полочки», матрицы d, e образуют двойную «полочку».

Есть ещё подгруппы $(a, f), (a, b), (a, c), (a, e, d)$ вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность 4×4 . Анализ показал, что структура этой канонической мономиальной группы аналогична предыдущему случаю. Отличается она тем, что и группа, и «полочки» содержат по четыре элемента.

Первые элементы таких совокупностей получаются при использовании единицы в верхнем углу матриц размерности 4×4 и указанных матриц размерности 3×3 на свободных местах. Следующие тройки элементов получаются посредством комбинаторной операции,двигающей элементы нечетных строк вправо, а элементы четных строк влево.

Среди 24 элементов группы отношений есть 12 элементов вида

$$A + E + F \subset \hat{G}.$$

Они образуют максимальную подгруппу группы отношений.

Кроме этого есть 12 элементов вида

$$B, C, D \subset \hat{Q}.$$

Они образуют факторгруппу данного множества. Их соотношение между собой выражается условиями вида

$$\hat{G}\hat{G} \Rightarrow \hat{G}, \hat{G}\hat{Q} \Rightarrow \hat{Q}, \hat{Q}\hat{G} \Rightarrow \hat{Q}, \hat{Q}\hat{Q} \Rightarrow \hat{G}.$$

Вся группа может быть получена на основе произведения элементов пары подгрупп. Количество неединичных элементов на единицу меньше размерности используемых матриц. Такова же и кратность произведений, которые при этом нужно выполнить. Обозначая совокупность неединичных производящих элементов буквой α , получим условия вывода элементов всей группы:

$$\alpha, \alpha\alpha, \alpha(\alpha\alpha), (\alpha\alpha)\alpha.$$

Размерность 5×5 . Получим систему матриц двумя способами, используя вертикальную и горизонтальную сдвиг-деформацию и указанные матрицы размерности 4×4 . Для классификации полученной совокупности введем пару «факторгрупп». Произведение этих элементов даёт всю их совокупность.

Первая факторгруппа образована элементами:

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они получены посредством вертикальной сдвиг-деформации.
Вторая факторгруппа образована матрицами

$$\varepsilon \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они получены посредством горизонтальной сдвиг деформации.

Понятно, что представленная пара факторгрупп размерности 5×5 тривиально повторяет свойства факторгрупп размерности 4×4 . Комбинаторный анализ позволяет получить все необходимые сведения о структуре мономиальных матриц конечной размерности.

5. СТРУКТУРА ГРУППЫ ЗАПОЛНЕНИЯ

Выполним тензорное умножение Кронекера, заменив единицы матриц Паули этими же матрицами, а нули – нулевыми матрицами. Введем обозначение $\sigma_j^i = \sigma^j \otimes \sigma^i$. Получим группу $V(4) = V(2) \otimes V(2)$. Она задается матрицами (с точностью до умножения на $\otimes 1$):

$$\begin{aligned}
\sigma_0^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_0^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_0^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_0^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\sigma_1^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_1^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_1^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \sigma_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \sigma_2^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\sigma_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \dots \sigma_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \sigma_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} a^1 &= \sigma_1^2, & a^2 &= \sigma_2^0, & a^3 &= \sigma_3^2, & b^1 &= \sigma_2^1, \\ b^2 &= \sigma_2^3, & b^3 &= \sigma_0^2, & c^1 &= \sigma_0^3, & c^2 &= \sigma_3^3, \\ c^3 &= \sigma_3^0, & e^1 &= \sigma_1^1, & e^2 &= \sigma_1^0, & e^3 &= \sigma_0^1. \end{aligned}$$

Элементы группы разбиваются на подгруппы a^i , b^i , c^i , e^i , f^i . Элементы a^i и b^i антикоммутируют, e^i и f^i коммутируют, а подгруппа c^i "переводит" a^i, b^i в e^i, f^i .

6. СИСТЕМА СУПЕРАЛГЕБР

Во многих областях научных исследований мы имеем дело с группами, которые образованы симметричными и антисимметричными матрицами. Однако до сих пор не найдена система алгебр, которой подчинена произвольная такая группа. В данной работе показано, что существует система супералгебр W (для группы G_B , состоящей из обратимых симметричных и антисимметричных матриц).

6.1. НОВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА

Пусть группа G_B состоит из симметричных матриц с элементами $S_{ij} = S_{ji}$ и антисимметричных матриц $A_{ij} = -A_{ji}$. Тогда $\{A_{ij}, S_{ij}, A_{ij}^{-1}, S_{ij}^{-1}, I\} \in G_B$. Введем индекс симметричности

$$\chi(A_{ij}) = 0,$$

$$\chi(S_{ij}) = 1$$

и фактор симметричности

$$\sigma = (-1)^\chi.$$

Он задает одномерное проективное представление группы G_B , так как

$$\sigma(\zeta) = \sigma(\xi \cdot \eta) = f(\xi, \eta) \sigma(\xi) \cdot \sigma(\eta),$$

где $(\xi, \eta, \zeta) \in G_B$, $f(\xi, \eta) \in Z_2 = [-1, 1]$. Найдем алгебру, которой подчинена группа G_B , учитывая факторы симметричности ее элементов. Заметим, что

$$\sigma(\xi) \neq 0, \sigma^2(\xi) = 1, \sigma^{-1}(\xi) = \sigma(\xi), \sigma(ab) = \sigma(ba).$$

Факторы симметричности образуют абелеву группу отношений между элементами группы G_B . Будем для удобства обозначать элементы группы G_B латинскими буквами. Введем произведение ее элементов, учитывая группу отношений $\sigma(\xi)$. Пусть

$$\langle ab \rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba,$$

$$\begin{aligned}\langle bc \rangle &= bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb, \\ \langle ca \rangle &= ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac.\end{aligned}$$

Определим

$$\langle\langle ab \rangle c \rangle = \langle ab \rangle c - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)c\langle ab \rangle,$$

$$\langle\langle bc \rangle a \rangle = \langle bc \rangle a - \sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)a\langle bc \rangle,$$

$$\langle\langle ca \rangle b \rangle = \langle ca \rangle b - \sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)b\langle ca \rangle.$$

Они содержат множители

$$\sigma(a, b), \sigma(b, c), \sigma(c, a), \sigma(a, b, c), \sigma(b, c, a), \sigma(c, a, b),$$

которые следует определить из дополнительных условий. Будем искать их, предполагая возможность циклического условия

$$A\langle\langle ab \rangle c \rangle + B\langle\langle bc \rangle a \rangle + C\langle\langle ca \rangle b \rangle = 0.$$

Найдем выражения для B и C , при которых получается тождество. Имеем

$$\begin{aligned}& A\langle\langle ab \rangle c - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)c\langle ab \rangle \rangle + B\langle\langle bc \rangle a - \sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)a\langle bc \rangle \rangle + \\& + C\langle\langle ca \rangle b - \sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)b\langle ca \rangle \rangle = \\& = A[abc - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)bac - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)[cab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)cba]] + \\& + B[bca - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cba - \sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)[abc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)acb]] +\end{aligned}$$

$$+ C\{cab - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)acb - \sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)[bca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)bac]\} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & (A - \sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)B)abc + \\ & + (A\sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab) - B\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc))cba + \\ & + (C - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)A)cab + \\ & + (C\sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca) - A\sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab))bac + \\ & + (B - \sigma(c, a)\sigma(b)\sigma(c, a, b)C)bca + \\ & + (B\sigma(b, c)\sigma(a)\sigma(b, c, a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc) - C\sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca))acb = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A - \sigma(a)\sigma(b, c)\sigma(b, c, a)B = 0,$$

$$A\sigma(a)\sigma(ab)\sigma(a, b)\sigma(a, b, c) - \sigma(bc)B = 0,$$

$$B - \sigma(b)\sigma(c, a)\sigma(c, a, b)C = 0,$$

$$B\sigma(b)\sigma(bc)\sigma(b, c)\sigma(b, c, a) - C\sigma(ca) = 0,$$

$$C - \sigma(c)\sigma(a, b)\sigma(a, b, c)A = 0,$$

$$C\sigma(c)\sigma(ca)\sigma(c, a)\sigma(c, a, b) - A\sigma(ab) = 0.$$

Примем условие, что

$$\sigma(\eta, \xi) = \sigma(\xi, \eta) = \sigma(\xi\eta) = \sigma(\eta\xi).$$

Из двух последних условий получим

$$\sigma(a, b, c)\sigma(c, a, b) = 1,$$

$$C = \sigma(c)\sigma(ab)\sigma(a, b, c)A.$$

Тогда

$$B = \sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac).$$

Из третьего условия следует, что

$$\sigma(b, c, a) = \sigma(a, b, c).$$

Из первого условия получим

$$\sigma(a, b, c) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc).$$

Пусть

$$\sigma(a, b, c) = \sigma(b, c, a) = \sigma(c, a, b).$$

Тогда, поскольку $A \neq 0$, имеем циклическое тождество, определяющее алгебру с отношением

$$\begin{aligned} &\langle\langle ab \rangle c \rangle + \langle\langle bc \rangle a \rangle \sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac) + \\ &+ \langle\langle ca \rangle b \rangle \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc) = 0 \end{aligned}$$

Это выражение умножим на $\sigma(b)\sigma(ac)$. Получим в симметричном по $\sigma(\xi)$ виде:

$$\langle\langle ab \rangle c \rangle \sigma(b)\sigma(ac) + \langle\langle bc \rangle a \rangle \sigma(c)\sigma(ba) + \langle\langle ca \rangle b \rangle \sigma(a)\sigma(cb) = 0.$$

6.2. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

1. Пусть $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = 1$. Тогда

$$\langle ab \rangle = ab - ba = [a, b].$$

Имеем тождество Якоби: $[[a, b]c] + [[b, c]a] + [[c, a]b] = 0$

2. Пусть $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = -1$. Тогда

$$\langle ab \rangle = ab + ba = \{a, b\}.$$

Имеем тождество: $[\{a, b\}c] + [\{b, c\}a] + [\{c, a\}b] = 0$.

Действительно, $\langle ab \rangle = ab - (-1)(-1)(-1)ba = ab + ba$

$$\begin{aligned} \langle \langle ab \rangle c \rangle &= \langle ab \rangle c - \sigma(a, b)\sigma(c)\sigma(a, b, c)c\langle ab \rangle = \\ &= \langle ab \rangle c - \sigma(ab)\sigma(c)\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab \rangle, \\ \langle ab \rangle c - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab \rangle &= \\ &= \langle ab \rangle c - (-1)(-1)(-1)(-1)c\langle ab \rangle = \langle ab \rangle c - c\langle ab \rangle. \end{aligned}$$

Действуя аналогично, получим

$$abc + bca + cba - abc - acb + cab + acb - bca - bac = 0.$$

Заметим, что антикоммутаторы имеют всегда ненулевой цикл, что свидетельствует о глубинной неассоциативности алгебры матриц, содержащей подалгебры антикоммутативного типа.

6.3. СУПЕРАЛГЕБРА ДЛЯ ГРУППЫ ПАУЛИ

Группа Паули состоит из матриц

$$\sigma^0 = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \quad \sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b,$$

$$\sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = c, \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = d.$$

Ее факторы симметричности таковы:

$$\sigma(a) = -1, \quad \sigma(b) = -1, \quad \sigma(c) = 1, \quad \sigma(d) = -1.$$

Найдем ее супералгебру.

1. Класс элементов, содержащих a и любую пару остальных элементов, подчинен условию

2.

$$\{\{ab\}d\} + [[bd]a] - \{\{da\}b\} = 0.$$

Действительно,

$$\langle ab \rangle = ab - (-1)(-1)(-1)ba = ab + ba,$$

$$\langle bd \rangle = bd - (-1)(-1)(1)db = bd - db,$$

$$\langle da \rangle = da - (-1)(-1)(-1)ad = da + ad,$$

$$\langle \langle ab \rangle d \rangle = \langle ab \rangle d - (-1)(-1)(-1)(1)d \langle ab \rangle = \langle ab \rangle d + d \langle ab \rangle,$$

$$\langle \langle bd \rangle a \rangle = \langle bd \rangle a - (-1)(-1)(-1)(-1)a \langle bd \rangle = \langle bd \rangle a - a \langle bd \rangle,$$

$$\langle \langle da \rangle b \rangle = \langle da \rangle b - (-1)(-1)(+1)(-1)b \langle da \rangle = \langle da \rangle b + b \langle da \rangle.$$

$$0 \equiv \langle \langle ab \rangle d \rangle (-1)(-1) + \langle \langle bd \rangle a \rangle (-1)(-1) + \langle \langle da \rangle b \rangle (-1)1 = \\ = (ab + ba)d + d(ab + ba) + (bd - db)a - a(bd - db) - (da + ad)b - b(da + ad) = 0.$$

3. Класс элементов без единицы подчинен тождеству Якоби:

$$[[bc]d] + [[cd]b] + [[db]c] = 0.$$

4. Единичные элементы удовлетворяют соотношению

$$[\{aa\}a] + [\{aa\}a] + [\{aa\}a] = 0.$$

6.4. СУПЕРАЛГЕБРЫ ДЛЯ МОНОМИАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Рассмотрим все варианты различных расположений единиц. Получим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они образуют группу. В ней есть подгруппа P :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем числа $a + ib + jc$. Найдем таблицу их умножения, используя P . Получим соответствие

$$\uparrow (a_1 + ib_1 + jc_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} c.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 c_2 & a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2 \\ a_1 a_2 + a_1 c_2 + b_1 b_2 & c_1 b_2 + a_1 a_2 + b_1 c_2 & c_1 c_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ c_1 a_2 + c_1 a_2 + a_1 b_2 & b_1 b_2 + c_1 a_2 + a_1 c_2 & b_1 c_2 + c_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, выполнив обратное проектирование, получим

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = \\ = a_1a_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1c_2) + j(a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2). \end{aligned}$$

Примем законы:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad i \cdot j = j \cdot i = 1,$$

$$i \cdot 1 = 1 \cdot i = i, \quad i \cdot i = j,$$

$$j \cdot 1 = 1 \cdot j = j, \quad j \cdot j = i.$$

Получим числа с единицами, которые подчинены условиям

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad i \cdot i \cdot i = 1, \quad j \cdot j \cdot j = 1.$$

Понятно, что они дублируют свойства матриц подгруппы P .

Остальные матрицы таковы:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учтены все возможные варианты. Мы получили мономиальную группу $MN(3)$ над группой $Z_2 = [-1, 1]$. В силу ассоциативности матриц они задают алгебру с отношениями, формируя их набор, согласованный с распределением отношений $w_M = [-1, 1]$ по группе $MN(3)$. Сопоставим матрицам трехуровневую систему отношений. Пусть, во-первых, задано соответствие:

$$a \rightarrow \sigma(a), \quad b \rightarrow \sigma(b), \quad c \rightarrow \sigma(b).$$

Здесь $\sigma(\xi) = 1$ или -1 . Их распределение может быть произвольным, подчиняясь некоторому дополнительному правилу, которое играет роль фактора деформации. Пусть, во-вторых, произведению элементов сопоставлены отношения:

$$ab \rightarrow \sigma(ab), \quad ba \rightarrow \sigma(ba), \quad ac \rightarrow \sigma(ac),$$

$$ca \rightarrow \sigma(ca), \quad bc \rightarrow \sigma(bc), \quad cb \rightarrow \sigma(bc) \dots$$

Примем, в-третьих, условие, что

$$\sigma(\xi \eta) = \sigma(\eta \xi),$$

где ξ, η – любые элементы мономиальной группы. Найдём алгебры с отношениями. Используем выражения, полученные ранее. Так,

$$\langle ab \rangle = ab - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)ba,$$

$$\langle bc \rangle = bc - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)cb,$$

$$\langle ca \rangle = ca - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(ca)ac,$$

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle = \langle ab\rangle c - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)c\langle ab\rangle,$$

$$\langle\langle bc\rangle a\rangle = \langle bc\rangle a - \sigma(b)\sigma(c)\sigma(ba)\sigma(ca)a\langle bc\rangle,$$

$$\langle\langle ca\rangle b\rangle = \langle ca\rangle b - \sigma(c)\sigma(a)\sigma(cb)\sigma(ab)b\langle ca\rangle.$$

Общее циклическое условие

$$\langle\langle ab\rangle c\rangle\sigma(b)\sigma(ac) + \langle\langle bc\rangle a\rangle\sigma(c)\sigma(ba) + \langle\langle ca\rangle b\rangle\sigma(a)\sigma(cb) = 0$$

задает взаимосвязи элементов с отношениями. Их легко получить. Если, например,

$$\begin{aligned} \sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = \sigma(ab) = \sigma(ac) = \sigma(bc) = 1, \\ \text{то } [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0. \end{aligned}$$

Если

$$\begin{aligned} \sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = -\sigma(ab) = -\sigma(ac) = -\sigma(bc) = 1, \\ \text{то } [\{ab\}c] + [\{cb\}a] + [\{ca\}b] = 0. \end{aligned}$$

Аналогично выводятся все варианты взаимосвязей для элементов. Некоторые из них отличаются только порядком следования элементов a, b, c . Укажем несколько возможностей:

$$\{[ab]c\} - \{[bc]a\} - \{[ca]b\} = 0,$$

$$[\{ab\}c] - [\{bc\}a] + [\{ca\}b] = 0,$$

$$[\{ab\}c] - [\{bc\}a] + [\{ca\}b] = 0,$$

$$\{[ab]c\} + \{[bc]a\} - \{[ca]b\} = 0,$$

$$[\{ab\}c] - [\{bc\}a] + [\{ca\}b] = 0,$$

$$[\{ab\}c] + [\{bc\}a] + [\{ca\}b] = 0 \dots$$

По-видимому, ими можно пользоваться как средством, позволяющим расширить картину взаимосвязей объектов, реализующуюся через алгебру с отношениями.

Покажем, что данные взаимосвязи находят аналогию в произведениях векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, заданных в трехмерном пространстве. Пусть

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}] &= -[\vec{b}\vec{a}] = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \\ &= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(b_x a_z - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x), \\ \{\vec{a}\vec{b}\} &= \{\vec{b}\vec{a}\} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \\ &= \vec{i}(a_y b_z + a_z b_y) + \vec{j}(b_x a_z + a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y + a_y b_x). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражения:

$$\begin{aligned} \{\vec{a}\vec{b}\}\vec{c} &= \vec{i}((a_x b_z + a_z b_x)c_z - c_y(a_x b_y + a_y b_x)) + \\ &+ \vec{j}(-1)((a_y b_z + a_z b_y)c_z - c_x(a_x b_y + a_y b_x)) + \\ &+ \vec{k}((a_y b_z + a_z b_y)c_y - c_x(a_x b_z + a_z b_x)), \end{aligned}$$

а также $[\vec{b}\vec{c}]\vec{a} = \dots$, $[\vec{c}\vec{a}]\vec{b} = \dots$.

Получим тождество

$$[\{\bar{a}\bar{b}\}\bar{c}] - [\{\bar{b}\bar{c}\}\bar{a}] - \{\{\bar{c}\bar{a}\}\bar{b}\} = 0.$$

Аналогично выводятся равенства

$$[[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}] + [[\bar{b}\bar{c}]\bar{c}] + [[\bar{c}\bar{a}]\bar{b}] = 0,$$

$$\{\{\bar{a}\bar{b}\}\bar{c}\} + \{\{\bar{b}\bar{c}\}\bar{a}\} + \{\{\bar{c}\bar{a}\}\bar{b}\} = 0 \dots$$

Заметим, что введенная операция коммутативна и некоммутативна, что управляется распределением факторов симметричности на числовом множестве. Легко обнаружить, что новая операция ассоциативна и неассоциативна. Действительно, получим

$$\begin{aligned} \langle\langle ab \rangle c \rangle - \langle a \langle bc \rangle \rangle &= \sigma(b)\sigma(c)\sigma(bc)(ac)b - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ab)b(ac) + \\ &+ \sigma(b)\sigma(c)\sigma(ab)\sigma(ac)b(ca) - \sigma(a)\sigma(b)\sigma(ac)\sigma(bc)(ca)b. \end{aligned}$$

Эта разность зависит от распределения факторов симметричности или от отношений и может быть равной или не равной нулю. Следовательно, учёт концепции отношений способен качественно изменить сущность и алгоритм использования числового множества.

7. ДЕФОРМАЦИЯ СИММЕТРИЙ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Пусть модель физического явления задана уравнениями

$$L\Psi = 0.$$

Здесь L – система дифференциальных операторов, Ψ – волновая функция. Пространственно-временная симметрия модели содержит дифференциальные операторы Λ . Тогда выполняется условие

$$L\Lambda\Psi - \Lambda L\Psi = 0.$$

Симметрия зависит от инфинитезимальных генераторов Γ_s и параметров группы Θ^s . Через дифференциалы координат она выражается так:

$$dx^{\mu'} = \left(I + \Gamma_s \Theta^s \right)_\nu^\mu dx^\nu.$$

Примем модель деформации симметрии:

1. Изменим генераторы и параметры симметрии, используя функции от деформационных матриц $Q \in \tilde{Q}$, и их инвариантных полиномов $Sp \tilde{Q}$ и $Det \tilde{Q}$.

2. Пусть

$$Q = diag(1, 1, 1, w), w = \det Q, F_{(1)} = 1 - w, F_{(2)} = w.$$

3. Используем вариант

$$\tilde{\Gamma}_s = \tilde{Q} \Gamma_s \tilde{Q}^{-1}, \quad \tilde{\Theta}^s = F_{(1)} \Theta_{fs}^s + F_{(2)} \Theta_m^s.$$

Тогда $Q \circ Q^{-1} = I, F_{(1)} + F_{(2)} = 1$.

Рассмотрим в качестве исходной симметрии группу Лоренца для дифференциалов координат (dx, cdt) :

$$\begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \det^{-1/2} A \cdot (A) \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & u \\ \frac{u}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix}.$$

Перейдем к деформированной симметрии, которую назовем сигруппой, выполнив несколько действий. Деформируем матрицу A без изменения её определителя:

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{w}} \frac{u}{c} \\ \frac{u\sqrt{w}}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Она сингулярна при $w=0$. В обобщенной электродинамике Максвелла данное значение показателя отношения имеет физическую интерпретацию. Чтобы его можно было учесть, заменим скорость u на скорость $\sqrt{w}u$. Получим

$$\tilde{A}^* = A(v\sqrt{w}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c}w & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим

$$\tilde{g}^* = \det^{-1/2}(\tilde{A}^*) \cdot \tilde{A}^*.$$

Учитывая анализ, проведенный в обобщенной электродинамике, введем скорость, которая зависит как от скорости первичного источника излучения u_{fs} , так и от скорости физической среды u_m :

$$u = (1-w)u_{fs} + wu_m.$$

Рассмотрим новые инфинитезимальные преобразования, соответствующие выполненной деформации

$$dx^{\mu'} = \left(I + \tilde{\Gamma}_s \tilde{\Theta}^s \right)_{\nu}^{\mu} dx^{\nu}.$$

Получим

$$dx' = \frac{dx + udt}{\left(1 - w \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

$$cdt' = \frac{cdt + dxw \frac{u}{c}}{\left(1 - w \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

На этой основе получим выражение для групповой скорости электромагнитного поля в нерелятивистском приближении, используя формализм преобразования систем координат, базирующийся на деформированной симметрии. Взаимосвязь скоростей задается выражением

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + udt}{dt + \frac{uw}{c^2} n^2 dx} = \frac{u_x + u}{1 + \frac{uw}{c^2} n^2 u_x}.$$

В нерелятивистском приближении оно имеет вид, согласующийся с решением системы обобщенных уравнений электродинамики:

$$u_g = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{w}{n^2}\right) (u_{fs}(1 - w) + wu_m).$$

Здесь

$$u_g = \frac{dx'}{dt'}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{c}{n}.$$

Для получения физической интерпретации этой формулы рассмотрим частный случай. Показателю отношения

$$w = 1 - \exp[-P_0(n - 1)]$$

соответствуют разные физические условия распространения излучения. Процесс изменения скорости поля при его переходе из вакуума от источника излучения, движущегося со скоростью u_{fs} в атмосферу Земли с переменной плотностью ρ , движущуюся со скоростью u_m нелинейно зависит от показателя отношения.

В вакууме симметрия процесса задаётся группой Галилея. Если излучение движется в среде с показателем отношения, равным единице, симметрия задаётся канонической группой Лорентца. Для описания процесса изменения параметров электромагнитного поля используется семейство симметрий. Среди них есть неизоморфные симметрии. Назовем исследуемую симметрию сигруппой Галилея-Лорентца.

7.1. СВОЙСТВА СИГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ-ЛОРЕНТЦА

Рассмотрим пару преобразований дифференциалов координат и времени, принадлежащих сигруппе:

$$\begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_1}{c} \\ w_1 \frac{u_1}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} dx'' \\ cdt'' \end{pmatrix} = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_2}{c} \\ w_2 \frac{u_2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \left(1 - w_1 \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{-0,5}, \quad \gamma_2 = \left(1 - w_2 \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{-0,5}.$$

Получим произведение элементов вида

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} dx'' \\ cdt'' \end{pmatrix} &= \gamma_2 \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 + w_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} & \frac{u_1 + u_2}{c} \\ \frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c} & 1 + w_2 \frac{u_1 u_2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \\
&= \gamma_2 \gamma_1 \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_1 + u_2}{c} \\ \frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} + \gamma_2 \gamma_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix}, \\
k = \frac{\gamma_2 \gamma_1}{\gamma_{1,2}}, \sigma &= \gamma_2 \gamma_1 \frac{u_1 u_2}{c^2} \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}, \gamma_{1,2} = \left(1 - \left(\frac{w_1 u_1 + w_2 u_2}{c} \right) \left(\frac{u_1 + u_2}{c} \right) \right)^{-0,5}.
\end{aligned}$$

Его свойства таковы:

$$A \cdot B = \kappa C + \sigma_1, B \cdot A = \kappa C + \sigma_2,$$

$$A, B, C \Rightarrow M_1, \kappa, \sigma_i \Rightarrow M_2, M_3,$$

$$\Delta = A \cdot B - B \cdot A = \sigma_1 - \sigma_2,$$

$$\frac{1}{2}(A \cdot B + B \cdot A) = \kappa C + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Элементы A, B, C принадлежат сигруппе M_1 , элементы κ, σ принадлежат, соответственно, мультипликативной группе и аддитивной группе, ассоциированными с данной сигруппой. Кроме операции произведения нам необходимо использовать операцию сложения. Следовательно, сигруппа задает алгебраическое множество, свойства которого следует изучить.

Покажем, что произведение элементов сигруппы согласуется со структурой сигруппы. Зададим элемент сигруппы через элемент канонической группы Лорентца и элемент группы треугольных матриц, принадлежащих унимодулярной группе:

$$\frac{1}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ w\frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0 \\ (w-1)\frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

По этой причине действие сигруппы можно рассматривать как действие матричного произведения двух согласованных между собой неизоморфных групп.

Выразим элемент, принадлежащий группе треугольных матриц, в виде матричного произведения элементов двух других групп. Получим

$$G_{1,2} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0 \\ (w-1)\frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (w-1)\frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-w\frac{u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{u^2}{c^2}w}{1-\frac{u^2}{c^2}} & 0 \\ 1-\frac{u^2}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_1 \cdot G_2.$$

Структура группы G_1 задана выражением вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \frac{(w-1)\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}w} \cong w - \frac{v}{c} + w^2 \frac{v^2}{c^2} - w \frac{v^3}{c^3}.$$

Структура группы G_2 такова:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a = \frac{\sqrt{1-w\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}(1-w)\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{4}w\frac{v^4}{c^4}.$$

В окрестности единичного элемента форма сигруппы

$$Sg_e = I + a_k \alpha^k + b_l \beta^l + c_m \gamma^m + \dots$$

аналогична форме группы. Однако параметры групп, которыми представлена сигруппа, в данном случае зависимы друг от друга. Это обстоятельство играет решающую роль при анализе законов сохранения, ассоциированных с сигруппой, а также в теории калибровочных полей, индуцируемых сигруппой.

Обратим внимание на специфику структуры исследуемой сигруппы. Заметим, что возможен вариант аддитивного представления сигруппы Галилея-Лорентца, используя каноническую группу Лорентца:

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c}w & 1 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1}{\gamma} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{c}(w-1) & 1 \end{pmatrix} - \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аддитивное разложение сигруппы Галилея-Лорентца по группе Галилея выглядит проще:

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{c} w & 1 \end{pmatrix} - \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, каноническая группа Лорентца выступает в роли группы Галилея, дополненной группой растяжения времени и группой согласованных деформаций для координат и времени. Группа Галилея может рассматриваться как группа Лорентца дополненная аналогичными группами. Действительно, получим

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{u}{c} & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аддитивное и мультипликативное представления сигруппы Галилея-Лорентца согласуются между собой по формуле:

$$g_1 g_2 g_3 \Leftrightarrow SG \Leftrightarrow \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3.$$

Произведение элементов сигруппы можно вложить в алгебраическое множество, содержащее элементы (α, β) . Матрицу размерности 2×2 можно записать в форме сигруппы и диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & d-1 \end{pmatrix} = \alpha + \beta.$$

В таком виде, с точностью до коэффициентов, задается произведение элементов сигруппы. Прямой расчет показал, что элементы сигруппы принадлежат алгебре Йордана [12]:

$$\begin{aligned}
x \circ y &= y \circ x, \\
(x^2 \circ y) \circ x &= x^2 \circ (y \circ x), \\
x \circ y &= \frac{1}{2}(xy + yx).
\end{aligned}$$

В форме обычного произведения матриц вида

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}, y = k_2 \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$$

она подчинена условиям:

$$\begin{aligned}
xy &\neq yx, \\
(yx^2)x + x(x^2y) &= x^2(xy) + (yx)x^2.
\end{aligned}$$

Они являются следствием ассоциативности матриц, вытекающим из общего закона, справедливого для алгебры Йордана:

$$\begin{aligned}
(x^2y)x + (yx^2)x + x(x^2y) + x(yx^2) &= \\
= x^2(yx) + x^2(xy) + (yx)x^2 + (xy)x^2.
\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае

$$(yx)x^2 = (yx^2)x, x(x^2y) = x^2(xy).$$

С учетом данного обстоятельства получим закон Йордана, зеркальный относительно знака равенства

$$x(x^2y) + (yx)x^2 = x^2(xy) + (yx^2)x.$$

В данном случае возможно обобщение закона произведения. Действительно, введем

$$x \circ y \neq y \circ x = \lambda xy \pm \mu yx.$$

В этом случае также справедлив зеркальный закон Йордана.

Заметим, что элементы сигруппы подчинены также условиям, используемым для квазигруппы Муфанг [13]:

$$z((xy)z) = (zx)(yz) = (z(xy))z.$$

Однако сигруппа не является квазигруппой из-за свойств произведения используемых нами матриц.

Для сигруппы Галилея-Лорентца справедливо условие эластичности:

$$(xy)x = x(yx).$$

При использовании матриц оно является частным случаем ассоциативности матриц. Известно [14], что изотопически инвариантный класс аналитических луп, удовлетворяющий тождеству эластичности, шире класса луп Муфанг. В силу указанных обстоятельств мы вправе считать, что релаксационный процесс в обобщенной электродинамике движущихся сред описывается наряду с алгеброй Йордана эластичной алгеброй со свойствами

$$\begin{aligned} xy &\neq yx, \\ (xy)x &= x(yx). \end{aligned}$$

Сигруппа Галилея-Лорентца подчинена также условиям

$$\begin{aligned} xy &\neq yx, \\ (x^2y)x &= x^2(yx). \end{aligned}$$

Следовательно, симметрия релаксационного процесса в обобщенной электродинамике Максвелла задается сигруппой Галилея-Лорентца. Её элементы образуют некоммутативную

алгебру Йордана. Кроме этого, сигруппа задает эластичную алгебру.

8. КОМПЕНСАЦИЯ ДЛЯ СИГРУППЫ

При анализе релаксационных процессов в электродинамике мы пришли к возможности анализа динамики параметров поля на основе действия на начальные параметры системы групп, которая названа сигруппой Галилея-Лорентца (сигруппы Гало).

Её математическая структура может быть представлена по-разному. Одним из вариантов является запись сигруппы Гало как произведения матриц, представляющих три группы: каноническую группу Лорентца, нижнюю треугольную и диагональную группы. Тогда

$$Sg = g(Lor)g(\Delta)g(diag).$$

Рассмотрим структуру этих групп в предположении, что скорости малы по отношению к скорости света в вакууме. Каноническая группа Лоренца будет задана хорошо известной системой генераторов и параметрами ε^a . Треугольная группа задана матрицами вида

$$g(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \frac{(w-1)u}{1-w\frac{u^2}{c^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = w\frac{u}{c} - \frac{u}{c} \Rightarrow \eta f_1^1(1, \varepsilon^a) + f_1^2(2, \varepsilon^a).$$

Для диагональной группы вида

$$g(diag) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

получим аналогичные соотношения. Действительно,

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sqrt{1 - w \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow -w \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) = \\
 &= w f_2^1(1, \varepsilon^a) + f_2^2(2, \varepsilon^a), \\
 a^{-1} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - w \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow w \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) = \\
 &= w f_3^1(1, \varepsilon^a) + f_3^2(2, \varepsilon^a).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразования волновой функции под действием сигруппы Гало. Оно получит вид, аналогичный разложению самой группы. Тогда

$$\delta Q^A = T_{(a)B}^A Q^B \varepsilon^a + R_{(b)B}^A Q^B \left(f_c^b(1, \varepsilon^a) \eta^c + f_c^b(2, \varepsilon^a) \right).$$

Вариация волновой функции имеет три слагаемых:

$$\delta Q^A = T_{(a)B}^A Q^B \varepsilon^a + R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q^B \eta^c + R_{(b)B}^A Q^B f_c^b(2, \varepsilon^a).$$

Первые слагаемые ассоциированы с канонической группой Лорентца. Вторые слагаемые представляют собой аналог группы со своими параметрами (которые могут, в частности, совпадать) и с генераторами, функционально зависящими от основной группы. Третьи слагаемые имеют структуру, функционально зависящую от первой и второй групп. Эти элементы нетривиальны для функционального вариационного анализа.

Закон сохранения, согласно теореме Нётер, вытекающий из рассматриваемого равенства, приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} \delta Q^A \right) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} T_{(a)B}^A Q^B \varepsilon^a + R_{(b)B}^A Q^B \left(f_c^b(1, \varepsilon^a) \eta^c + f_c^b(2, \varepsilon^a) \right) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} T_{(a)B}^A Q^B \right) \varepsilon^a + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q^B f_c^b(1, \varepsilon^a) \right) \eta^c + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q^B f_c^b(2, \varepsilon^a) \right) = 0. \end{aligned}$$

В отличие от стандартной схемы анализа, когда имеет место сохранение токов одного типа, для процесса характерно наличие системы, состоящей из трех токов. Тогда

$$\frac{\partial J_a^\mu(1)}{\partial x^\mu} \varepsilon^a + \frac{\partial J_b^\mu(2)}{\partial x^\mu} \eta^b + \frac{\partial J^\mu(3)}{\partial x^\mu} = 0.$$

Выполним варьирование лагранжиана при условии, что как параметры групп, так и функции, зависят от координат и времени. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial Q^A} T_{(a)B}^A Q^B \varepsilon^a(x) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} T_{(a)B}^A Q_{,\mu}^B \varepsilon^a(x) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} T_{(a)B}^A Q^B \frac{\partial \varepsilon^a(x)}{\partial x^\mu} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial Q^A} R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q^B \eta^c(x) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q_{,\mu}^B \eta^c(x) + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q^B \partial_\mu f_c^b(1, \varepsilon^a) \eta^c(x) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q^B \frac{\partial \eta^c(x)}{\partial x^\mu} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial Q^A} R_{(b)B}^A Q^B f_c^b(2, \varepsilon^a) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q_{,\mu}^B f_c^b(2, \varepsilon^a) + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q^B \frac{\partial f_c^b(2, \varepsilon^a)}{\partial x^\mu} = 0. \end{aligned}$$

С учетом уравнений движения получим некомпенсированную часть вариации лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{L} = & \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} \left(T_{(a)B}^A Q^B \frac{\partial \varepsilon^a(x)}{\partial x^\mu} + R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q^B \frac{\partial \eta^c(x)}{\partial x^\mu} + R_{(b)B}^A Q^B \frac{\partial f^b(2, \varepsilon^a)}{\partial x^\mu} \right) + \\
& + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} \left(R_{(b)B}^A Q^B \partial_\mu f_c^b(1, \varepsilon^a) \eta^c(x) \right) + \frac{\partial L}{\partial Q^A} R_{(b)B}^A Q^B f^b(2, \varepsilon^a) + \\
& + \frac{\partial L}{\partial Q_{,\mu}^A} R_{(b)B}^A Q_{,\mu}^B f^b(2, \varepsilon^a) = 0. \\
\delta A'^J = & U_{(a)K}^J(1) A'^K \varepsilon^a(x) + C_a^{J,\mu} \frac{\partial \varepsilon^a}{\partial x^\mu}, \\
\delta B'^J = & U_{(b)K}^J(2) B'^K \eta^b(x) + C_a^{J,\mu} \frac{\partial \eta^b}{\partial x^\mu}, \\
\delta C'^J = & U_{(c)K}^J(3) C'^K f^c(2, x) + C_c^{J,\mu} \frac{\partial f^c(2, x)}{\partial x^\mu}.
\end{aligned}$$

Для обеспечения данного условия требуется ввести три системы калибровочных полей, а также обеспечить выполнение дополнительных условий, которые отсутствуют в стандартной схеме анализа калибровочных полей. Тогда ковариантная производная получит вид

$$\nabla_\mu Q^A = \partial_\mu Q^A - T_{(a)B}^A Q^B A_\mu^a + R_{(b)B}^A f_c^b(1, \varepsilon^a) Q^B B_\mu^b + R_{(c)B}^A Q^B C_\mu^c.$$

Следовательно, взаимодействие объектов и полей, которое описывается на основе ковариантных производных, будет существенно более сложным, чем при учете инвариантности на группе симметрии.

9. АБЕЛЕВА ГРУППА ДЕФОРМАЦИЙ

Рассмотрим изменения величин, посредством которых описываются физические объекты и явления. Используем для их задания матрицы размерности 4. Исследуем изменения этих матриц под действием факторов, которые принято называть факторами деформации.

Простой анализ даёт три вида деформаций.

Во-первых, возможно аддитивное изменение одного или нескольких элементов матрицы. Новую матрицу $\tilde{A}$ можно представить в виде суммы начальной матрицы A и матрицы $D_1(a, b)$, зависящей от элементов b , относящихся к матрице B и элементов a , относящихся к матрице A . Получим

$$\tilde{A} = A + D_1(a, b), a \rightarrow A, b \rightarrow B.$$

Во-вторых, возможно мультипликативное изменение одного или нескольких элементов матрицы. Его можно представить в виде суммы начальной матрицы A и матрицы $D_2(a, b)$, зависящей от элементов b , относящихся к матрице B и элементов a , относящихся к матрице A . Получим

$$\tilde{A}_2 = A + D_2(a, b), a \rightarrow A, b \rightarrow B.$$

В-третьих, возможно изменение одного или нескольких элементов матрицы посредством перестановки её элементов. Его можно представить в виде суммы начальной матрицы A и матрицы $D_3(a, b)$, зависящей от элементов b , относящихся к матрице B и элементов a , относящихся к матрице A . Получим

$$\tilde{A}_3 = A + D_3(a, b), a \rightarrow A, b \rightarrow B.$$

Назовём $D_i(a, b)$ $i=1, 2, 3$ ядрами деформаций. Следовательно, все виды деформаций задаются одинаковыми функциональными выражениями с различными ядрами деформаций. Деформированный тензор есть сумма нескольких тензоров с обычными свойствами. Проанализируем некоторые математические свойства деформаций. Рассмотрим ряд деформаций

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Им соответствуют три одноуровневые деформации

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они задают цепочку равенств

$$\begin{aligned} A + \alpha &= B, B + \beta = C, C + \gamma = D, \\ A + \alpha + \beta &= C, A + \alpha + \beta + \gamma = D. \end{aligned}$$

Запишем обратные матрицы деформаций

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единица данного множества задана нулевой матрицей. Множество матриц ассоциативно. Следовательно, деформации, представленные матрицами, образуют аддитивную матричную абелеву группу (mag).

В данном варианте деформации представлены аналогично объектам, на которые они действуют:

$$D(a, b) \cong A, B = f(A, B).$$

Согласно анализу, проведенному ранее, деформации можно классифицировать по их свойствам.

Деформации могут быть представлены классами в виде совокупности элементов группы мономиальных матриц, в форме правых или левых идеалов, в качестве идемпотентов. Это могут быть преднули, предидемпотенты, предидеалы. Возможны ряды деформирования, представленные соединениями элементов, относящихся к разным классам деформаций. Их суммирование даёт богатый спектр свойств объектов и явлений. Он выражен объединением матриц с разными свойствами. Соединение преднуля с предидемпотентом даёт, например, элементы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ситуация становится «богаче» по своим свойствам, если матричное произведение дополнено комбинаторным. Для физического моделирования представляется естественным комбинировать операции.

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ

Элементы группы $H^1(G, A)$ можно интерпретировать как классы автоморфизмов группы F , содержащейся в точной последовательности

$$1 \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1,$$

тождественны на A и на G по модулю сопряжений элементами $a \in A$.

Группа $H^2(G, A)$ задает классы расширений группы A с помощью G на основе эквивалентных наборов факторов. Группа H^3 описывает препятствия к расширению неабелевой группы с центром A с помощью G . Другие группы когомологий не имеют общепринятой интерпретации.

Предыдущий анализ показал, что при деформации физической модели могут меняться только элементы симметрий. Мы вправе ожидать, что аналогично будут использоваться элементы теории когомологий.

Рассмотрим аспекты когомологического моделирования симметрий с целью построения алгоритма применения когомологий в физике.

Приведем стандартную таблицу свойств коцепей:

$$\begin{aligned}
df(g) &= gf(g) - f(g), \\
df(g_1, g_2) &= g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1), \\
df(g_1, g_2, g_3) &= g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + \\
&+ f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2), \\
df(g_1, g_2, g_3, g_4) &= g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + \\
&+ f(g_1, g_2 g_3, g_4) - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3).
\end{aligned}$$

Группа $H^0(G, A)$. Она соответствует группе гомоморфизмов

$$H^0(G, A) \Rightarrow A^G = \{a \in A \mid ga = a, \forall g \in G\}.$$

Пример. Рассмотрим следующий вариант:

$$g = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, a_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, a(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ga_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ \tilde{\beta} & 0 \end{pmatrix} = a_1,$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, ga_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\gamma} \\ 0 & \tilde{\delta} \end{pmatrix}.$$

Пара абелевых групп $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ тривиально расширена на основе группы G .

Группа $H^1(G, A)$.

Согласно определению

$$H^1(G, A) = \frac{Der(G, A)}{Ider(G, A)},$$

$$Der(G, A) = \{ f : G \rightarrow A \mid g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1), \forall x, y \in G \},$$

$$Ider(G, A) = \{ f : G \rightarrow A \mid f(g) = ga - a, \forall g \in G \}.$$

Пример: Решением функционального уравнения

$$g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0.$$

является, в частности, функция

$$f(g) = ga - a.$$

Другие решения с использованием чисел k_1, k_2 имеют вид

$$f^1(g) = k_1(ga - a),$$

$$f^2(g) = (ga - a)k_2.$$

Отсюда следует, что

$$H^1(G, A) = \{ k_i : -k_n \dots -k_1, 0, k_1 \dots k_n \}.$$

С физической точки зрения функцию $f(g)$ можно рассматривать как характеристику отклонения элемента ga от элемента a . По существу подхода мы описываем таким образом, как структуру, так и активность изделий. Следовательно, кохомологии могут иметь прямую связь с физическими свойствами исследуемых объектов и явлений.

Естественно рассмотреть другие варианты. Так, например, для функции

$$f_a(g) = ga - ka.$$

получим неоднородное функциональное уравнение

$$f_a(g_1g_2) - g_1f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = k(1-k)a.$$

Для функции

$$f_a(g) = \varphi(a)(ga - ka).$$

получим функциональное уравнение вида

$$f_a(g_1g_2) - g_1f_a(g_2) - k \cdot f_a(g_1) = \varphi(a)k(1-k)a.$$

Рассмотрим ещё одну возможность. Пусть

$$f(g_1g_2) - f(g_1)g_2 - g_1f(g_2) = 0.$$

Тогда

$$f(g_1g_2) - g_1f(g_2) - f(g_1) = f(g_1)(g_2 - I) = \Delta_1.$$

Группа $H^2(G, A)$. Она характеризует систему функций, которые принято называть факторами расширения группы. Тогда

$$\begin{aligned} df(g_1, g_2, g_3) &= g_1f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + \\ &+ f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2). \end{aligned}$$

В частности, возможен вариант

$$g_1f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0.$$

Рассмотрим это выражение с другой точки зрения. Учтём стандартное условие ассоциативности для матриц:

$$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3.$$

Запишем его функционально в двух допустимых формах:

$$\begin{aligned}g_1 f(g_2, g_3) &= f(g_1, g_2) g_3, \\f(g_1, g_2 g_3) &= f(g_1 g_2, g_3).\end{aligned}$$

Просуммируем эти выражения:

$$g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) g_3 = 0.$$

Дополним их нулевой суммой из двух слагаемых $f(g_1, g_2)$.
Получим функциональное уравнение

$$\begin{aligned}g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) &= \Delta_2, \\ \Delta_2 &= f(g_1, g_2)(g_3 - I).\end{aligned}$$

Оно аналогично уравнению для когомологий второго ранга. Отличие в том, что уравнение неоднородно, имеет ненулевую правую часть. Уравнение имеет систему частных решений:

$$\begin{aligned}f_1(g_1, g_2) &= (g_1 g_2), \\f_2(g_1, g_2) &= \varphi(g_1) \varphi(g_2), \\ \varphi(g_1 g_2) &= \varphi(g_1) g_2 + g_1 \varphi(g_2).\end{aligned}$$

Действительно, первое решение проверяется тривиально, а для второго решения выполняется условие

$$\begin{aligned}g_1(\varphi(g_2)\varphi(g_3)) - (\varphi(g_1)g_2)\varphi(g_3) - (g_1\varphi(g_2))\varphi(g_3) \\ + \varphi(g_1)(\varphi(g_2)g_3) + \varphi(g_1)(g_2\varphi(g_3)) + (\varphi(g_1)\varphi(g_2))g_3 = 0.\end{aligned}$$

Функция $\varphi(g)$ может иметь матричный вид, что позволяет рассматривать разные её представления. Все они будут принадлежать классу неоднородных когомологий второго ранга. По-

сколько указанные действия напоминают дифференцирование с правилом Лейбница, мы получили функциональное дифференцирование с дополнительными степенями свободы.

Группа H^3 . Она характеризует препятствия для расширения симметрий. Когомологическое условие имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(g_1, g_2, g_3, g_4) &= g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + \\ &+ f(g_1, g_2 g_3, g_4) - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) g_4 = 0.\end{aligned}$$

Проблема состоит в том, чтобы найти условия физического плана, из которых следует данное выражение. Поскольку число положительных и отрицательных слагаемых различно, решения могут иметь вид, аналогичный решениям, полученным для скрещенных когомологий.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - \\ - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) g_4 = 0.\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}f(g_1, g_2, g_3) &= f(g_1) f(g_2) f(g_3), \\ f(g_1 g_2) &= f(g_1) g_2 + g_1 f(g_2).\end{aligned}$$

Тогда, используя условие ассоциативности, получим тождество на матричнозначных функциях:

$$\begin{aligned}g_1 f(g_2) f(g_3) f(g_4) - (f(g_1) g_2) f(g_3) f(g_4) - \\ - (g_1 f(g_2)) f(g_3) f(g_4) + f(g_1) (f(g_2) g_3) f(g_4) + \\ + f(g_1) (g_2 f(g_3)) f(g_4) - f(g_1) f(g_2) (f(g_3) g_4) - \\ - f(g_1) f(g_2) (g_3 f(g_4)) + f(g_1) f(g_2) f(g_3) g_4 = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_3 = f(g_1, g_2, g_3)(g_4 - I) = -\Phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = -g_1 f(g_2, g_3, g_4) + f(g_1 g_2, g_3, g_4) - f(g_1, g_2 g_3, g_4) + f(g_1, g_2, g_3 g_4) - f(g_1, g_2, g_3).$$

Когомологический полином, в этом частном случае, показывает отклонение функции $f(g_1, g_2, g_3)g_4$ от значения $f(g_1, g_2, g_3)$:

$$\Phi(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1) f(g_2) (f(g_3)(I - g_4)).$$

Поскольку возможны другие решения, смысловое значение и физическое наполнение когомологического полинома может быть другим. В этом случае, равно как и при решении системы дифференциальных уравнений, мы сталкиваемся с трансфинитностью решений. В зависимости от того, какие условия накладываются на функции, мы будем иметь разные решения на основе одного и того же функционального уравнения.

Когомологические многочлены можно рассматривать теперь как представления системы разностей:

$$\begin{aligned} H_1 &\Rightarrow \Delta_1 = f(g_1)(g_2 - I), \\ H_2 &\Rightarrow \Delta_2 = f(g_1, g_2)(g_3 - I), \\ H_3 &\Rightarrow \Delta_3 = f(g_1, g_2, g_3)(g_4 - I) \dots \end{aligned}$$

Цепочку можно продолжить на когомологии более высоких порядков. В рассмотрение введён новый математический объект. Он может иметь физическую интерпретацию,

Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Выполним циклическую замену индексов в исходном когомологическом полиноме.

На её основе введём систему ассоциированных кохомологических уравнений:

$$\begin{aligned}
\varphi^0(g_1, g_2, g_3, g_4) &= g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + \\
&+ g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3), \\
\varphi^1(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + \\
&+ f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3), \\
\varphi^2(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2 g_3, g_4) + f(g_2, g_3 g_4, g_1) + \\
&+ f(g_3, g_4 g_1, g_2) + f(g_4, g_1 g_2, g_3), \\
\varphi^3(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_2, g_3, g_4 g_1) + \\
&+ f(g_3, g_4, g_1 g_2) + f(g_4, g_1, g_2 g_3), \\
\varphi^4(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3) + f(g_2, g_3, g_4) + \\
&+ f(g_3, g_4, g_1) + f(g_4, g_1, g_2). \\
\varphi^5(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3) g_4 + f(g_2, g_3, g_4) g_1 + \\
&+ f(g_3, g_4, g_1) g_2 + f(g_4, g_1, g_2) g_3,
\end{aligned}$$

Альтернированные столбцы этой системы функций при нулевом весе функции φ^5 задают стандартные условие для коцикла вида

$$\begin{aligned}
&g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - \\
&- f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) = 0.
\end{aligned}$$

Альтернированные столбцы этой функций при нулевом весе функции φ^4 задают неоднородные кохомологические уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - \\ - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) g_4 = 0.$$

Расположим в одном месте систему ассоциированных кохомологических уравнений для разных групп кохомологий.

На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + \\ + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3) = 0', \\ f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + \\ + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3) = 0.$$

На группе H^2 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3) + g_2 f(g_3, g_1) + g_3 f(g_1, g_2) = 0, \\ f(g_1 g_2, g_3) + f(g_2 g_3, g_1) + f(g_3 g_1, g_2) = 0, \\ f(g_1, g_2 g_3) + f(g_2, g_3 g_1) + f(g_3, g_1 g_2) = 0, \\ f(g_1 g_2) + f(g_2 g_3) + f(g_3 g_1) = 0.$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0, \\ f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) = 0, \\ f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

Стандартные уравнения для коциклов и неоднородные кохомологические уравнения получаются для групп H^1, H^2 аналогично алгоритму, предложенному для группы H^3 .

Подойдём к исследуемому уравнению для когомологий третьего ранга с другой стороны. Рассмотрим таблицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & + & g_1 f(g_2, g_3, g_4) & g_2 f(g_3, g_4, g_1) & g_3 f(g_4, g_1, g_2) & g_4 f(g_1, g_2, g_3) \\ 2 & - & f(g_1 g_2, g_3, g_4) & f(g_2 g_3, g_4, g_1) & f(g_3 g_4, g_1, g_2) & f(g_4 g_1, g_2, g_3) \\ 3 & + & f(g_1, g_2 g_3, g_4) & f(g_2, g_3 g_4, g_1) & f(g_3, g_4 g_1, g_2) & f(g_4, g_1 g_2, g_3) \\ 4 & - & f(g_1, g_2, g_3 g_4) & f(g_2, g_3, g_4 g_1) & f(g_3, g_4, g_1 g_2) & f(g_4, g_1, g_2 g_3) \\ 5 & + & f(g_1, g_2, g_3) & f(g_2, g_3, g_4) & f(g_3, g_4, g_1) & f(g_4, g_1, g_2) \\ 6 & - & f(g_1, g_2, g_3) g_4 & f(g_2, g_3, g_4) g_1 & f(g_3, g_4, g_1) g_2 & f(g_4, g_1, g_2) g_3 \end{pmatrix}$$

Суммируя элементы таблицы по строкам, получим систему циклических уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi^0(g_1, g_2, g_3, g_4) &= g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + \\ &+ g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3), \\ \varphi^1(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + \\ &+ f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3), \\ \varphi^2(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2 g_3, g_4) + f(g_2, g_3 g_4, g_1) + \\ &+ f(g_3, g_4 g_1, g_2) + f(g_4, g_1 g_2, g_3), \\ \varphi^3(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_2, g_3, g_4 g_1) + \\ &+ f(g_3, g_4, g_1 g_2) + f(g_4, g_1, g_2 g_3), \\ \varphi^4(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3) + f(g_2, g_3, g_4) + \\ &+ f(g_3, g_4, g_1) + f(g_4, g_1, g_2), \\ \varphi^5(g_1, g_2, g_3, g_4) &= f(g_1, g_2, g_3) g_4 + f(g_2, g_3, g_4) g_1 + \\ &+ f(g_3, g_4, g_1) g_2 + f(g_4, g_1, g_2) g_3, \end{aligned}$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^5 , задают стандартные условия для коцикла вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - \\ - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) = 0.$$

Альтернированные суммы элементов, представленных столбцами этой системы функций при нулевом весе функции φ^4 , задают неоднородные уравнения

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) - f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_1, g_2 g_3, g_4) - \\ - f(g_1, g_2, g_3 g_4) + f(g_1, g_2, g_3) g_4 = 0.$$

Расположим в одном месте систему уравнений, ассоциированных с когомологиями.

На группе H^3 имеем (с точностью до цикла по переменным) уравнения вида

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + \\ + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3) = 0', \\ f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + \\ + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3) = 0.$$

На группе H^2 имеем таблицу:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc} 1 & + & g_1 f(g_2, g_3) & g_2 f(g_3, g_1) & g_3 f(g_1, g_2) \\ 2 & - & f(g_1 g_2, g_3) & f(g_2 g_3, g_1) & f(g_3 g_1, g_2) \\ 3 & + & f(g_1, g_2 g_3) & f(g_2, g_3 g_1) & f(g_3, g_1 g_2) \\ 4 & - & f(g_1, g_2) & f(g_2, g_3) & f(g_3, g_1) \\ 5 & + & f(g_1 g_2) g_3 & f(g_2 g_3) g_1 & f(g_3 g_1) g_2 \\ 6 & - & f(g_1, g_2, g_3) & f(g_2, g_3, g_1) & f(g_3, g_1, g_2) \end{array} \right).$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения:

$$\begin{aligned}
 g_1 f(g_2, g_3) + g_2 f(g_3, g_1) + g_3 f(g_1, g_2) &= 0, \\
 f(g_1 g_2, g_3) + f(g_2 g_3, g_1) + f(g_3 g_1, g_2) &= 0, \\
 f(g_1, g_2 g_3) + f(g_2, g_3 g_1) + f(g_3, g_1 g_2) &= 0, \\
 f(g_1, g_2, g_3) + f(g_2, g_3, g_1) + f(g_3, g_1, g_2) &= 0. \\
 f(g_1, g_2) + f(g_2, g_3) + f(g_3, g_1) &= 0, \\
 f(g_1 g_2) g_3 + f(g_2 g_3) g_1 + f(g_3 g_1) g_2 &= 0,
 \end{aligned}$$

Сумма четырёх элементов по столбцам с учётом знаков таблицы даёт когомологические уравнения:

$$\begin{aligned}
 g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2, g_3) - f(g_1, g_2) &= 0, \\
 g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) g_3 &= 0, \\
 g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2, g_3) - f(g_1, g_2) &= 0.
 \end{aligned}$$

На группе H^1 имеем уравнения вида

$$\left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & + & g_1 f(g_2) & g_2 f(g_1) \\ 2 & - & f(g_1, g_2) & f(g_2, g_1) \\ 3 & + & f(g_1) & f(g_2) \\ 4 & - & f(g_1 g_2) & f(g_2 g_1) \\ 5 & + & f(g_1) g_2 & f(g_2) g_1 \end{array} \right).$$

Их сумма по столбцам даёт когомологические уравнения:

$$\begin{aligned}
 g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) + f(g_1) &= 0, \\
 g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) + f(g_1) g_2 &= 0, \\
 g_1 f(g_2) - f(g_1, g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) g_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Их сумма по строкам даёт циклические уравнения.

$$\begin{aligned}g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) &= 0, \\f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) &= 0, \\f(g_1) + f(g_2) &= 0.\end{aligned}$$

При альтернированном сложении элементов некоторые циклические уравнения берется с нулевым весом. Они задают обобщение теории когомологий. Дифференциалы от функций получают дополнительные слагаемые. Так учитываются свойства объектов и явлений, «упущенные» при стандартном анализе коцепей и их дифференциалов.

11. ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ

Анализ группы H^1 позволяет предложить физическую интерпретацию функциям ассоциированным с когомологиями. Назовём элементы g объектами. Назовём функцию $f(g)$ воздействием объекта на себя. Функция $f(g_1 g_2)$ пусть задает воздействие первого объекта на второй объект. Функция $g_1 f(g_2)$ задает изменение объекта g_1 под воздействием справа объекта g_2 с влиянием $f(g_2)$. Речь идет о совокупности объектов с согласованными воздействиями друг на друга. По этой причине ясно, что начальные группы когомологий описывают систему свойств для 2,3,4 объектов. Когомологиям H^N более высоких порядков соответствует система свойств для $N+1$ объекта.

Возможна «физическая» интерпретация формул, соответствующих ассоциированным когомологическим функциям.

На примере группы H^1 интерпретация выглядит так:

- а) изменение первого объекта под воздействием второго объекта уравновешено изменением второго объекта под воздействием первого; б) воздействие первого объекта на влияние второго объекта уравновешено воздействием второго объекта на влияние первого:

$$g_1 f(g_2) + g_2 f(g_1) = 0,$$

- влияние первого объекта на второй уравновешено влиянием второго объекта на первый (аналог закона Ньютона о равновесии действия и противодействия):

$$f(g_1 g_2) + f(g_2 g_1) = 0,$$

- в системе объектов их влияние на себя уравновешено:

$$f(g_1) + f(g_2) = 0.$$

Для ассоциированных когомологических групп более высоких порядков речь идет о совокупности свойств большего числа объектов:

$$H^1 \rightarrow 2, H^2 \rightarrow 3, H^3 \rightarrow 4 \dots H^N \rightarrow N+1 \dots$$

Покажем, что рассматриваемые уравнения задают дополнительные свойства физической реальности. Проанализируем некоторые частные решения. Уравнение

$$\begin{aligned} \varphi^0(g_1, g_2, g_3, g_4) = & g_1 f(g_2, g_3, g_4) + g_2 f(g_3, g_4, g_1) + \\ & + g_3 f(g_4, g_1, g_2) + g_4 f(g_1, g_2, g_3) = 0 \end{aligned}$$

допускает решение в виде совокупности функций, согласованных с их множителем:

$$g_1 f(g_2, g_3, g_4) = g_1 (g_2 - g_1^{-1} g_2 g_1 + g_3 - g_1^{-1} g_3 g_1 + g_4 - g_1^{-1} g_4 g_1) = \\ = g_1 g_2 - g_2 g_1 + g_1 g_3 - g_3 g_1 + g_1 g_4 - g_4 g_1.$$

Эти уравнения иницируют построение коммутаторов алгебры симметрии. Уравнение

$$\varphi^1(g_1, g_2, g_3, g_4) = f(g_1 g_2, g_3, g_4) + f(g_2 g_3, g_4, g_1) + \\ + f(g_3 g_4, g_1, g_2) + f(g_4 g_1, g_2, g_3) = 0$$

допускает решение

$$f(g_1 g_2, g_3, g_4) = \varphi^1(g_1) + \varphi^2(g_2) - \varphi^3(g_3) - \varphi^4(g_4).$$

Оно задаёт линейную суперпозицию независимых функций, ассоциированных с исследуемыми объектами.

Решения имеют аналогичный вид для других кохомологических групп. В общем случае решения ассоциированных кохомологических уравнений имеют систему новых свойств. Они могут найти применение в физике. Возможно, что именно функциональные уравнения образуют начальное звено динамики и структуры физических объектов.

Неоднородные кохомологические уравнения можно рассматривать как обобщение кохомологической системы уравнений.

Покажем, что варианты расширения симметрий, применяемые в физике, приводят к моделям, описываемым обобщенными кохомологиями.

Рассмотрим на конкретных примерах варианты построения функциональных отношений в системах матриц. Из них следуют обобщенные уравнения кохомологий.

Вариант 1. Изучим расширение группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используем для этого знаковую группу. Получим соответствия вида

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b_1 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \rightarrow a_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, f_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}, c_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b_2 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix} \rightarrow a_2 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, f_2 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix}, c_2 : \begin{pmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{pmatrix} \rightarrow a_1 : \begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{pmatrix}, f_1 : \begin{pmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix}, c_1 : \begin{pmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{pmatrix}.$$

Построим функциональное уравнение на основе данной системы матриц. Они образуют группу, которая получена применением знаковой группы к исходной группе (E, e_1, e_2, e_3) .

Введём функцию $\Phi(g_1 \dots g_n) = n\varphi$. Здесь n — число аргументов функции Φ , φ — элемент знаковой группы. Выберем $\varphi = \text{column}(+, +, -, -)$. Пусть, например,

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(ab) = \Phi(a)b + a\Phi(b).$$

Пусть, например,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\alpha)\beta - \alpha\Phi(\beta).$$

Следовательно, знаковая группа подчинена паре функциональных уравнений.

Введём соответствие

$$f(g_1, g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2).$$

При условиях, указанных выше, им подчинены, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} g_1 f(g_2, g_3) - f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) &= 0, \\ g_1 f(g_2, g_3) + f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2 g_3) - f(g_1, g_2) &= 0. \end{aligned}$$

Вариант 2. Рассмотрим функциональное уравнение, построенное по правилу «учёта внешнего фактора». В его роли используем матрицу

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функцию сопоставления сконструируем по формуле

$$f(g_1 \dots g_n) = n(g_1 \dots g_n) a_0.$$

Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим соотношение

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) g_2 + g_1 f(g_2).$$

Вариант 3. Пусть матрицы подчинены комбинаторному произведению. Выберем

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) g_2 - f(g_2).$$

Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) g_2 + f(g_2).$$

Вариант 4. Известно, что совокупность единичных матриц образует группу. Выполним её расширение посредством комбинаторной операции

$$K = \text{column}(\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow).$$

Получим совокупность матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K(E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1,$$

$$K(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2, K(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3, K(e_3) = E.$$

Применим формулу

$$K(g_1 \cdots g_n) = nK(g_1 \cdots g_n).$$

Таблица произведений такова:

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & E & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline E & E & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & E & e_3 & e_2 \\ e_2 & e_2 & e_3 & E & e_1 \\ e_3 & e_3 & e_2 & e_1 & E \end{array} \right).$$

Анализ показал подчинение этой группы системе степенных функциональных уравнений

$$K^p(g_1 g_2) = K^q(g_1) g_2 + g_1 K^r(g_2).$$

Они образуют три класса:

$$K(g_1 g_2) = K(g_1) g_2 + g_1 K(g_2),$$

$$K^3(\eta \eta) = K(\eta) \eta + \eta K(\eta),$$

$$K(\alpha \beta) = K^3(\alpha) \beta + \alpha K(\beta).$$

Вариант 5. Рассмотрим возможность построения нелинейных функциональных уравнений на матрицах. В качестве базового множества рассмотрим размерностное расширение группы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное множество не является группой. Оно образует совокупность матриц, полученную на основе указанного выше комбинаторного приема. Ей можно придать функциональные свойства. Введём функцию приведения матрицы или их произведения к некоторой другой матрице из данной совокупности. Вес функции зададим числом начальных элементов в её аргументе. Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f(g_1 g_2) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно принятому алгоритму получим связь

$$g_1 g_2 f(g_1 g_2) = g_1 f(g_1) + g_2 f(g_2).$$

Если матрицы выбраны так, что

$$g_1 g_2 = f(g_1 g_2),$$

получим нелинейное функциональное соотношение

$$f^2(g_1 g_2) = g_1 f(g_1) + g_2 f(g_2).$$

В нём содержится информация на элементах, которые находятся за пределами исходного множества. В данном случае их роль выполняют матрицы

$$f(g_1 g_2) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы можно использовать для вторичного приведения. Если в такой роли используются $f(g_1), f(g_2)$, получим функциональное уравнение более сложного типа.

12. КАК ОБЪЕДИНИТЬ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ГРАВИТАЦИЮ

Известно несколько вариантов объединения электромагнетизма и гравитации. Ни один из них не обеспечил возможности физического, структурного подхода к гравитации и не стимулировал построения структурной модели света. Идея объединения выдвинута Эйнштейном в качестве фундаментальной задачи. Пятимерную модель искомого объединения предложил Калуца. Она не оправдала надежды исследователей.

В рассматриваемом нами случае электромагнетизм и гравитация задаются тензорами. Более того, теория гравитационного поля имеет свои истоки в электродинамике.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОЛЕЙ

Напомним математическую структуру электродинамики Фарадея-Ампера. Уравнения

$$\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km} = 0, F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$$

для тензора электромагнитного поля

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

имеют векторный вид:

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 &\Rightarrow \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0, \\ \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = 0 &\Rightarrow (-i) \left(\partial_y E_z - \partial_z E_y + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} = 0 \Rightarrow i \left(\partial_z E_x - \partial_x E_z + \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \right),$$

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0 \Rightarrow (-i) \left(\partial_x E_y - \partial_y E_x + \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \right).$$

Они соответствуют выборке тройки несовпадающих индексов из четверки индексов: $(1230) \rightarrow (123, 230, 301, 012)$.

Векторный вид уравнений соответствует формулам

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{div} \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i(\partial_x E_y - \partial_y E_x) + \dots,$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

При рассмотрении модели, способной совместно описывать электромагнитное и гравитационное поле, будем использовать математическую и физическую аналогию гравитации с электромагнетизмом. С одной стороны, такая задача естественна для объектов, у которых есть как электрический, так и гравитационный заряд. В такой роли выступают, в частности, электрон и протон. С другой стороны, мы получаем предпосылки для анализа поведения предзарядов, так как, согласно ранее принятой гипотезе, электрические и гравитационные предзаряды по-разному изготовлены из одних и тех же ориентированных струн.

Покажем, что возможность искомого объединения следует из электродинамики. Рассмотрим уравнения Фарадея-Ампера:

$$Q_{kmn} = \partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km} = 0 = \partial_{[k} F_{mn]}.$$

Так как

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m,$$

получим

$$\partial_k (\partial_m A_n - \partial_n A_m) + \partial_m (\partial_n A_k - \partial_k A_n) + \partial_n (\partial_k A_m - \partial_m A_k) \equiv 0.$$

Продифференцируем эти уравнения по производным с дополнительным индексом и дополним их слагаемыми, сумма которых равна нулю:

$$\begin{aligned} & \partial_l (\partial_k (\partial_m A_n - \partial_n A_m) + \partial_m (\partial_n A_k - \partial_k A_n) + \\ & + \partial_n (\partial_k A_m - \partial_m A_k)) + \partial_k \partial_m \partial_n A_l - \partial_k \partial_m \partial_n A_l \equiv 0. \end{aligned}$$

Тогда их можно записать в другой форме:

$$\begin{aligned} & \partial_k \partial_m (\partial_n A_l - \partial_l A_n) + \partial_m \partial_n (\partial_l A_k - \partial_k A_l) + \\ & + \partial_n \partial_l (\partial_k A_m - \partial_m A_k) + \partial_l \partial_k (\partial_m A_n - \partial_n A_m) \equiv 0. \end{aligned}$$

На основе тензора напряжений получим циклические уравнения

$$\partial_k \partial_m F_{nl} + \partial_m \partial_n F_{lk} + \partial_n \partial_l F_{km} + \partial_l \partial_k F_{mn} = 0.$$

Переставим индексы в этом уравнении, учитывая, что тензор, описывающий электромагнитное поле, антисимметричен. Запишем уравнения в общем виде

$$\partial_m (\partial_k \Phi_{nl} - \partial_n \Phi_{kl}) + \partial_l (\partial_n \Phi_{km} - \partial_k \Phi_{nm}) = 0.$$

Подставим в них выражение для симметричного тензора, который предлагается использовать в качестве тензора напряжений гравитационного поля в тензорной теории гравитации

$$G_{mn} = \partial_m B_n + \partial_n B_m.$$

Получим тождество

$$\begin{aligned} & \partial_m (\partial_k (\partial_n B_l + \partial_l B_n) - \partial_n ((\partial_k B_l + \partial_l B_k))) + \\ & + \partial_l (\partial_n (\partial_k B_m + \partial_m B_k) - \partial_k (\partial_n B_m + \partial_m B_n)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемая система уравнений в качестве решения даёт не только не только антисимметричный $F_{mn}(q, q)$, но и симметричный $F_{mn}(q, \mu)$ тензоры напряженности электромагнитного поля. Аналогично есть решения для антисимметричного $F_{mn}(\mu, q)$ и симметричного $F_{mn}(\mu, \mu)$ гравитационного поля. Общее решение имеет вид

$$\Phi_{mn} = \vec{i} \alpha F_{mn}(q, q) + \vec{j} \beta F_{mn}(q, \mu) + \vec{k} \gamma F_{mn}(\mu, q) + \vec{l} \delta F_{mn}(\mu, \mu).$$

Решение в форме суперпозиции симметричных и антисимметричных тензоров напряженности как электромагнитного, так и гравитационного полей является качественно новой чертой данной системы уравнений.

Мы имеем дело с системой дифференциальных уравнений третьего порядка для пары четырехпотенциалов, посредством которых задаются симметричные и антисимметричные тензоры электромагнитного и гравитационного полей.

Мы получили единую систему уравнений, пригодную для совместного описания электромагнитных и гравитационных полей. Эти поля заданы соответственно антисимметричным, и симметричным тензорами. В рассматриваемом случае мы приходим к структурной модели света, в которой есть четыре базовых объекта: пара электрических и пара гравитационных предзарядов.

Рассмотрим несколько другую возможность, согласующуюся с электродинамикой Максвелла

$$\partial_l (\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km}) - \partial_m (\partial_k F_{nl} + \partial_n F_{lk} + \partial_l F_{kn}) = 0.$$

Преобразуем систему уравнений к новому виду, изменив индексы. Получим

$$\partial_l (\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} - \partial_n F_{mk}) = \partial_m (\partial_k F_{nl} - \partial_n F_{kl} + \partial_l F_{kn}).$$

Прямой подстановкой проверяется факт, что эти уравнения дают решения в форме симметричного тензора:

$$\begin{aligned} \partial_l (\partial_k (\partial_m A_n + \partial_n A_m) + \partial_m (\partial_n A_k + \partial_k A_n) - \partial_n (\partial_m A_k + \partial_k A_m)) = \\ = \partial_m (\partial_k (\partial_n A_l + \partial_l A_n) - \partial_n (\partial_k A_l + \partial_l A_k) + \partial_l (\partial_n A_k + \partial_k A_n)). \end{aligned}$$

Они задают также решения в форме суперпозиции симметричного и антисимметричного тензоров.

Следовательно, нам теперь известны две системы уравнений, которые порождают как электромагнитное, так и гравитационное поле, а также их суперпозицию. Они аналогичны друг другу, хотя имеют разный вид:

$$\begin{aligned} \partial_l (\partial_n \Phi_{km} - \partial_k \Phi_{nm}) + \partial_m (\partial_k \Phi_{nl} - \partial_n \Phi_{kl}) = 0, \\ \partial_l (\partial_k Q_{mn} + \partial_m Q_{nk} - \partial_n Q_{mk}) = \partial_m (\partial_k Q_{nl} - \partial_n Q_{kl} + \partial_l Q_{kn}). \end{aligned}$$

Их решения таковы

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} &= \vec{i}a_1 F_{mn}(q, q) + \vec{j}b_1 F(q, \mu) + \vec{k}c_1 F_{mn}(\mu, q) + \vec{l}d_1 F_{mn}(\mu, \mu), \\ Q_{mn} &= \vec{i}a_2 F_{mn}(q, q) + \vec{j}b_2 F(q, \mu) + \vec{k}c_2 F_{mn}(\mu, q) + \vec{l}d_2 F_{mn}(\mu, \mu). \end{aligned}$$

Данная пара систем уравнений следует из возможности разного объединения уравнений электродинамики, используя для этого знак плюс или минус. Для уравнений Фарадея-Ампера, задающих динамику электромагнитных полей, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\partial_l (\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km}) + \partial_m (\partial_k F_{nl} + \partial_n F_{lk} + \partial_l F_{kn}) &= 0, \\ \partial_l (\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km}) - \partial_m (\partial_k F_{nl} + \partial_n F_{lk} + \partial_l F_{kn}) &= 0.\end{aligned}$$

Фактически, мы дифференцируем выражения, равные нулю, что обеспечивает указанную возможность. Если нуль заменить константами, мы приходим к рассмотрению варианта обобщенной электродинамики.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ИНДУКЦИЙ

Задача состоит в том, чтобы получить единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций. Рассмотрим возможности, вытекающие из электродинамики.

В электродинамике индукции задаются тензором второго ранга, который получается на основе тензора напряженности электромагнитного поля и тензора четвертого ранга, зависящего от свойств физической среды и её движений, в форме

$$H^{ik}(q) = \chi^{ikmn}(q) F_{mn}(q).$$

Для него экспериментально доказан закон

$$\partial_i H^{ik}(q) = s^k(q).$$

По аналогии мы будем считать, что возможно задание тензора индукций для гравитационного поля на основе симметричного тензора для поля и некоторого тензора четвёртого ранга. Примем из формальных соображений закон

$$P^{ik}(\mu) = \chi^{ikmn}(\mu) F_{mn}(\mu).$$

Тогда

$$\partial_i P^{ik}(\mu) = s^k(\mu).$$

Выражение для *силы, действующей на объект*, у которого есть и электрический, и гравитационный заряд, будет состоять из пары слагаемых:

$$F_p = s^k(q)F_{kp}(q) + s^k(\mu)F_{kp}(\mu).$$

Оно конкретизируется только после решения полной системы уравнений.

Рассмотрим проблему с другой точки зрения. Запишем уравнения электродинамики для полей и индукций в единой форме, используя стандартную модель Максвелла:

$$\begin{aligned}\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km} &= 0, \\ \partial_k H_{mn} + \partial_m H_{nk} + \partial_n H_{km} &= s_{kmn}, \\ H^{ik} &= \chi^{ikmn} F_{mn}.\end{aligned}$$

Здесь

$$F_{mn}(q) = \partial_m A_n(q) - \partial_n A_m(q) \Rightarrow F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m.$$

Рассмотрим сумму двух выражений, ассоциированных с указанными уравнениями:

$$\partial_l (\partial_k F_{mn} + \partial_m F_{nk} + \partial_n F_{km}) + \partial_m (\partial_k F_{nl} + \partial_n F_{lk} + \partial_l F_{kn}) = 0.$$

Так как для тензора электромагнитного поля выполняется условие

$$\partial_l \partial_m F_{nk} + \partial_m \partial_l F_{kn} = 0,$$

получим

$$\partial_l (\partial_n F_{km} - \partial_k F_{nm}) + \partial_m (\partial_k F_{nl} - \partial_n F_{kl}) = 0.$$

Аналогично получим

$$\partial_l (\partial_k H_{mn} + \partial_m H_{nk} + \partial_n H_{km}) + \partial_m (\partial_k H_{nl} + \partial_n H_{lk} + \partial_l H_{kn}) = \\ = \partial_l S_{kmn} + \partial_m S_{knl}.$$

При условии

$$\partial_l \partial_m H_{nk} + \partial_m \partial_l H_{kn} = 0,$$

которое характерно для электромагнитного поля, уравнения преобразуются к виду

$$\partial_l (\partial_n H_{km} - \partial_k H_{nm}) + \partial_m (\partial_k H_{nl} - \partial_n H_{kl}) = \partial_l S_{nkm} + \partial_m S_{knl}.$$

Эти уравнения позволяют объединить модели электромагнитного и гравитационного полей, представленные, соответственно, антисимметричным и симметричным тензорами

$$F_{mn}(q) = \partial_m A_n(q) - \partial_n A_m(q), \\ F_{mn}(\mu) = \partial_m A_n(\mu) + \partial_n A_m(\mu).$$

Так, система уравнений для электромагнитного и гравитационного полей

$$\partial_l (\partial_n \Phi_{km} - \partial_k \Phi_{nm}) + \partial_m (\partial_k \Phi_{nl} - \partial_n \Phi_{kl}) = 0$$

имеет решения в виде суммы тензоров электромагнитного и гравитационного полей:

$$\Phi_{mn} = \alpha F_{mn}(q) \pm \beta F_{mn}(\mu) = \\ = \alpha (\partial_m A_n(q) - \partial_n A_m(q)) + \beta (\partial_m A_n(\mu) + \partial_n A_m(\mu)).$$

С математической точки зрения этой ситуации соответствует объединение величин, описывающих разные поля, в единую систему. Оно может иметь разный смысл и содержание. С физической точки зрения этой ситуации соответствует модель согла-

сованного учёта электромагнитного и гравитационного полей как физических факторов.

Естественно предложить неоднородные уравнения, которые аналогичным образом «объединяют» индукции электромагнитного и гравитационного полей. Возможны разные варианты. В каждом из них есть свои преимущества.

Вариант 1. Заметим, что условие

$$\partial_l \partial_m H_{nk} + \partial_m \partial_l H_{kn} = 0$$

не выполняется для симметричного тензора. По этой причине искомые единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций будут сложнее аналогичных уравнений для полей.

На их роль претендуют обобщенные уравнения, согласованные со структурой уравнений электродинамики:

$$\begin{aligned} & \partial_l (\partial_k H_{mn} + \partial_m H_{nk} + \partial_n H_{km}) + \partial_m (\partial_k H_{nl} + \partial_n H_{lk} + \partial_l H_{kn}) + \\ & + \partial_l M_{(kmn)} + \partial_m M_{(knl)} = \partial_l s_{kmn} + \partial_m s_{knl}. \end{aligned}$$

Для гравитационного поля требуется учесть слагаемые, относящиеся к не равным нулю диагональным элементам тензора индукций гравитационного поля. Они представлены в данном случае выражениями

$$\partial_l M_{(kmn)}, \partial_m M_{(knl)}.$$

Выразим диагональные компоненты функционально, учитывая предложенную ранее модель массодинамики. Разместим тройку индексов, по которым проводится цикл для тензора $H_{\xi\eta}$, в круглую скобку: $kmn \rightarrow (kmn)$. Индекс, не относящийся к данной тройке, обозначим введенной круглой скобкой. Тогда искомые выражения для диагональных элементов, согласуясь с предложенной ранее тензорной теорией гравитационного поля, получают вид

$$M_{(kmn)} = \partial_{(kmn)} H_{(kmn)(kmn)}.$$

Для электромагнитного поля эти выражения равны нулю. Для гравитационного поля они дают добавки, позволяющие построить модель, которая содержит в себе модель гравитации Эйнштейна в представлении Логунова.

Единые уравнения для электромагнитных и гравитационных индукций получают вид:

$$\begin{aligned} & \partial_l (\partial_k \Pi_{mn} + \partial_m \Pi_{nk} + \partial_n \Pi_{km}) + \partial_m (\partial_k \Pi_{nl} + \partial_n \Pi_{lk} + \partial_l \Pi_{kn}) + \\ & + \partial_l \partial_{(kmn)} \Pi_{(kmn)(kmn)} + \partial_m \partial_{(knl)} \Pi_{(knl)(knl)} = \\ & = \alpha \partial_l s_{kmn}(q) + \alpha \partial_m s_{knl}(q) + \beta \partial_l s_{kmn}(\mu) + \beta \partial_m s_{knl}(\mu). \end{aligned}$$

Они имеют решения

$$\Pi_{mn} = \alpha H_{mn}(q) + \beta H_{mn}(\mu).$$

Электромагнетизм и гравитация формально объединены в единую систему уравнений. Уравнения построены не только для полей, но и для индукций.

Если $\alpha = 0$, мы анализируем только гравитационное поле. Если $\beta = 0$, мы анализируем только электромагнитное поле. В общем случае возможно их совместное рассмотрение.

Связи между полями и индукциями могут выбираться в соответствии с обычной практикой:

$$H^{ij}(q) = \chi^{ijkl} H_{kl}(q), H^{ij}(\mu) = \chi^{ijkl} H_{kl}(\mu).$$

Тензоры четвертого ранга могут быть согласованы друг с другом. Их структура, как показал анализ релятивистских эффектов, достаточно сложна и учитывает ряд физических аспектов рассматриваемых задач.

Важно то обстоятельство, что теперь гравитация и электромагнетизм могут рассматриваться совместно и согласованно. Конечно, это есть первый шаг к структуре реального их объединения.

Можно рассмотреть объединение индукций электромагнитного и гравитационного полей с другой точки зрения.

Вариант 2. В тензорной теории гравитации для индукций используется «закон сохранения» вида

$$\partial_i \tilde{H}^{ij}(\mu) = \tilde{s}^j(\mu).$$

Аналогичный закон доказан в электродинамике:

$$\partial_i \tilde{H}^{ij}(q) = \tilde{s}^j(q).$$

В силу указанных обстоятельств возможен *единый закон* для электромагнитных и гравитационных индукций

$$\partial_i \tilde{\Pi}^{ij}(q, \mu) = \tilde{s}^j(q, \mu).$$

Его решения

$$\tilde{\Pi}^{ij}(q, \mu) = \alpha \tilde{H}^{ij}(q) + \beta \tilde{H}^{ij}(\mu)$$

согласуются с выбором токов

$$\tilde{s}^j(q, \mu) = \alpha \tilde{s}^j(q) + \beta \tilde{s}^j(\mu).$$

Вариант 3. Возможно введение гиперплоскости для тензоров гравитационных и электромагнитных индукций с реперами $\vec{i}, \vec{j}$. Векторный единый закон для индукций электромагнитного и гравитационного поля получает вид

$$\partial_i \tilde{\Pi}^{ij}(q, \mu) = \tilde{s}^j(q, \mu).$$

Его решения

$$\tilde{\Pi}^{ij}(q, \mu) = \vec{i} \alpha \tilde{H}^{ij}(q) + \vec{j} \beta \tilde{H}^{ij}(\mu)$$

математически корректно согласуются с выбором токов

$$\tilde{s}^j(q, \mu) = \vec{i} \alpha \tilde{s}^j(q) + \vec{j} \beta \tilde{s}^j(\mu).$$

Вариант 4. В рассматриваемых вариантах объединения различных моделей электромагнитные и гравитационные поля и индукции «не смешаны» между собой. Эта ситуация может интерпретироваться как первичное разложение единого поля на слагаемые с весовыми множителями. Вторые члены разложения могут иметь, например, вид

$$\tilde{H}^{ik}(q) g_{kl}(x) H^{lj}(q) + \dots$$

Они превращают теорию, линейную по тензорам электрического и гравитационного поля в теорию, нелинейную по этим тензорам. «Смеси» могут быть более сложными, обеспечивая возможности взаимосвязей рассматриваемых полей с другими физическими «полями».

13. МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИИ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЭЛЕКТРОДИНАМИКОЙ

Модели гравитации, известные в настоящее время, в основном базируются на идее, предложенной Эйнштейном: гравитация является фундаментальным физическим свойством реальности. Она формирует свойства пространства-времени. Объекты и их взаимодействия вторичны по отношению к ним. В этом подходе физическая материальность пространства и времени не признается. Пространство и время не рассматриваются как фи-

зические изделия. Первичность в парадигме и физическая нематериальность гравитации образуют главные противоречивые элементы модели Эйнштейна.

Конкурирующие модели гравитации либо дополняют указанную модель, либо базируются на некоторых новых положениях. В частности, релятивистская модель гравитации Логунова выступает в роли теории физических полей в пространстве Минковского. В этом подходе удалось преодолеть сингулярности модели Эйнштейна, построить тензор энергии-импульса и законы сохранения.

Однако остается невыясненным ряд вопросов:

- Возможно ли описание гравитационных явлений в макроскопическом пространстве и времени $T^1 \times R^3$, следующем из макрофизики и привычном для экспериментаторов?

- Как получить из теории гравитации модель гравитационного заряда и его эволюции? Есть ли отрицательный и положительный гравитационные заряды? Есть ли нулевой гравитационный заряд?

- В каком смысле и каким образом можно физически и математически согласовать между собой теорию электродинамических и гравитационных явлений? Насколько они похожи и почему различны между собой? Насколько могут быть похожи модели электрических и гравитационных зарядов?

- Есть ли у гравитации скрытая физическая материальная природа, чем она обусловлена? Можно ли получить визуальный образ физического механизма гравитационного воздействия? Каким образом расширить и углубить практические приложения гравитации, как управлять гравитацией?

- Какие физические и математические моменты упущены в теории гравитации? Как их учесть и применить на практике?

- Есть ли частицы, ассоциированные с гравитационным излучением? Чему равна их энергия?

В данной работе в качестве исходной точки анализа используется идея алгебраической аналогии между электромагнетизмом и гравитацией. Она состоит в том, что обе указанных модели построены на одной и той же матричной, проективной, уни-модулярной группе в мономиальном представлении

$PSL(4, R)$, названной группой заполнения физических моделей. Известно, что электродинамика Максвелла имеет простой матричный вид на паре кватернионов, принадлежащих этой группе и учитывающих антисимметричную структуру тензоров электродинамики. Однако группа заполнения содержит еще тройку антикватернионов, посредством которых можно описывать симметричные тензорные поля. Известно, что закон Кулона для электрических зарядов по своей структуре похож на закон Ньютона для массовых зарядов.

Материализуем базовую идею, приняв точку зрения, что гравитацию можно описать на тройке антикватернионов группы заполнения физических моделей.

ПРОСТЕЙШАЯ ВЕКТОРНАЯ МАССОДИНАМИКА

Вариант 1. Построим векторную модель массодинамики в форме спинорных уравнений, ассоциированных с антикватернионами. Она позволит выразить математическое единство массодинамики и электродинамики, а также приблизиться к ее физической сути. Модель позволит обсуждать конструкцию массовых зарядов и сравнивать ее с конструкцией электрических зарядов. Появятся новые возможности для прояснения сущности взаимодействий, ассоциированных с указанными зарядами и внешними условиями, в которой они находятся.

При построении простейшей модели массодинамики используем аналогию с электродинамикой. Для этого, во-первых, введём через новые четырехпотенциалы аналоги

«электрических» $\vec{L} \approx \vec{E}$ и «магнитных» $\vec{K} \approx \vec{B}$ полей. Во-вторых, используем в качестве исходного шага уравнения для $\vec{L}, \vec{K}$ на паре антикватернионов (учитывая тот факт, что спинорная электродинамика построена в форме линейных уравнений на паре кватернионов). Рассмотрим в качестве *начального шага* уравнения вида

$$(r^{ij} f_i \partial_j \phi^* + g^{ij} e_i \partial_j \phi) P = s,$$

$$r^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1), g^{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, 1).$$

В матричном виде (с точностью до оператора проектирования P) они выглядят так:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{i}{c_g} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} L_x - iK_x \\ L_y - iK_y \\ L_z - iK_z \\ L_0 - iK_0 \end{pmatrix} +$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_z + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{(-i)}{c_g} \partial_t \right\} \begin{pmatrix} L_x + iK_x \\ L_y + iK_y \\ L_z + iK_z \\ L_0 + iK_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ s_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют векторные уравнения

$$-\partial_x (L_0 - iK_0) + \partial_y (L_z - iK_z) + \partial_z (L_y - iK_y) + \frac{i}{c_g} \partial_t (L_x - iK_x) +$$

$$+ \partial_x (L_0 + iK_0) + \partial_y (L_z + iK_z) + \partial_z (L_y + iK_y) - \frac{i}{c_g} \partial_t (L_x + iK_x) = s_x,$$

$$\begin{aligned}
& \partial_x (L_z - iK_z) - \partial_y (L_0 - iK_0) + \partial_z (L_x - iK_x) + \frac{i}{c_g} \partial_t (L_y - iK_y) + \\
& + \partial_x (L_z + iK_z) + \partial_y (L_0 + iK_0) + \partial_z (L_x + iK_x) - \frac{i}{c_g} \partial_t (L_y + iK_y) = s_y, \\
& \partial_x (L_y - iK_y) + \partial_y (L_x - iK_x) - \partial_z (L_0 - iK_0) + \frac{i}{c_g} \partial_t (L_z - iK_z) + \\
& + \partial_x (L_y + iK_y) + \partial_y (L_x + iK_x) + \partial_z (L_0 + iK_0) - \frac{i}{c_g} \partial_t (L_z + iK_z) = s_z, \\
& -\partial_x (L_x - iK_x) - \partial_y (L_y - iK_y) - \partial_z (L_z - iK_z) + \frac{i}{c_g} \partial_t (L_0 - iK_0) + \\
& + \partial_x (L_x + iK_x) + \partial_y (L_y + iK_y) + \partial_z (L_z + iK_z) - \frac{i}{c_g} \partial_t (L_0 + iK_0) = s_0.
\end{aligned}$$

Их можно записать в иной форме:

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y + \frac{1}{c_g} \partial_t K_x = -i \partial_x K_0 + s_x,$$

$$\partial_x L_z + \partial_z L_x + \frac{1}{c_g} \partial_t K_y = -i \partial_y K_0 + s_y,$$

$$\partial_x L_y + \partial_y L_x + \frac{1}{c_g} \partial_t K_z = -i \partial_z K_0 + s_z,$$

$$\partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = \frac{i}{c_g} K_0 + s_0.$$

Введем новый дифференциальный оператор:

$$rat \vec{L} = \begin{Bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L_x & L_y & L_z \end{Bmatrix} =$$

$$= \vec{i}(\partial_y L_z + \partial_z L_y) + \vec{j}(\partial_x L_z + \partial_z L_x) + \vec{k}(\partial_x L_y + \partial_y L_x).$$

Он позволяет записать предложенные уравнения массодинамики для одного тензора в векторном виде, формально аналогичном уравнениям электродинамики Максвелла. Действительно, получим

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g} \partial_t \vec{K} - i grad K_0 + \vec{s}, div\vec{K} = \frac{i}{c_g} K_0 + s_0.$$

Чтобы достичь большего сходства с электродинамикой, рассмотрим частный случай с $K_0 = const = 0, \vec{s} = 0, s_0 = 0$. Получим упрощенные уравнения

$$rat\vec{L} = -\frac{1}{c_g} \partial_t \vec{K}, div\vec{K} = 0.$$

В электродинамике в силу антисимметричности тензоров отсутствуют диагональные элементы. Для симметричного тензора массодинамики их нужно как-то учесть. Используем для этого третий антикватернион, образующий подгруппу диагональных матриц Картана c^i в группе $SL(4, C)$. Будем рассматривать диагональные элементы симметричных тензоров независимо. Для этого используем проекционные матрицы:

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Pi^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они сконструированы из матриц Картана $c^i, i = 0, 1, 2, 3$ в виде:

$$\Pi^1 = 0,25(c_0 + c^1 + c^2 + c^3), \Pi^2 = 0,25(c_0 - c^1 + c^2 - c^3),$$

$$\Pi^1 = 0,25(c_0 + c^1 - c^2 - c^3), \Pi^0 = 0,25(c_0 - c^1 - c^2 + c^3).$$

Они следуют из структуры матриц c^i согласно формуле

$$\Pi^k = \xi_{ij}(k) c^i c^j, \xi_{ij}(k) \Rightarrow c^k.$$

$$c^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим их таким образом, чтобы система дифференциальных уравнения допускала «волновые» уравнения для четырехпотенциала гравидинамики $A_p(\mu)$. Рассмотрим дополнение предыдущих уравнений новыми слагаемыми:

$$(r^{ij} f_i \partial_j \phi^* + g^{ij} e_i \partial_j \phi + 2\Pi^i \Pi^j \partial_i \partial_j A)P = s, A = \text{column}(A_1, A_2, A_3, A_0).$$

Пусть также, по аналогии с электродинамикой, $K_0 = L_0 = 0$.

Получим уравнения вида

$$\text{rat}\vec{L} = -\frac{1}{c_g} \partial_t \vec{K} - 2 \text{grad}^2 \vec{A} + \vec{s}, \text{div} \vec{K} = \frac{2}{c_g^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} + s_0.$$

Здесь использован оператор

$$\text{grad}^2 \vec{A} = \vec{i} \partial_x^2 A_x + \vec{j} \partial_y^2 A_y + \vec{k} \partial_z^2 A_z.$$

Предлагаемые уравнения построены с использованием двух новых дифференциальных операторов: $\text{rat}\vec{L}$, $\text{grad}^2 \vec{A}$. Их нет в электродинамике, они не использовались и в других разделах физики. Мы получаем некую качественно новую физическую модель. Выполним ее начальный анализ. Обратим внимание на возможные новые физические следствия.

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y + \frac{1}{c_g} \partial_t K_x = -2\partial_x^2 A_x + s_x,$$

$$\partial_x L_z + \partial_z L_x + \frac{1}{c_g} \partial_t K_y = -2\partial_y^2 A_y + s_y,$$

$$\partial_x L_y + \partial_y L_x + \frac{1}{c_g} \partial_t K_z = -2\partial_z^2 A_z + s_z,$$

$$\partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = s_0.$$

Проанализируем структуру полученной модели. В декартовых координатах введём симметричный тензор

$$\phi_{kl}(\mu) = \partial_k A_l(\mu) + \partial_l A_k(\mu).$$

Запишем его в матричном виде

$$\phi_{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} 2\partial_x A_x & \partial_x A_y + \partial_y A_x & \partial_x A_z + \partial_z A_x & \partial_x A_0 + \partial_0 A_x \\ \partial_x A_y + \partial_y A_x & 2\partial_y A_y & \partial_y A_z + \partial_z A_y & \partial_y A_0 + \partial_0 A_y \\ \partial_x A_z + \partial_z A_x & \partial_y A_z + \partial_z A_y & 2\partial_z A_z & \partial_z A_0 + \partial_0 A_z \\ \partial_x A_0 + \partial_0 A_x & \partial_y A_0 + \partial_0 A_y & \partial_z A_0 + \partial_0 A_z & 2\partial_0 A_0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} L^{11} & L_z & L_y & K_x \\ L_z & L^{22} & L_x & K_y \\ L_y & L_x & L^{33} & K_z \\ K_x & K_y & K_z & L^{00} \end{pmatrix}.$$

Запишем в новом виде указанные выше дифференциальные уравнения массодинамики. Они имеют вид уравнений для четырёхпотенциала, так как из условий вида

$$\partial_y L_z + \partial_z L_y + \frac{1}{c} \partial_t K_x = -2\partial_x^2 A_x + s_x \rightarrow$$

$$\partial_x (2\partial_x A_x) + \partial_y (\partial_x A_y + \partial_y A_x) + \partial_z (\partial_x A_z + \partial_z A_x) + \partial_0 (\partial_x A_0 + \partial_0 A_x) = s_x \dots \Rightarrow$$

следует система уравнений

$$\nabla^2 A_1 + \partial_0^2 A_1 + \partial_x (\operatorname{div} \vec{A} + \partial_0 A_0) = s_1,$$

$$\nabla^2 A_2 + \partial_0^2 A_2 + \partial_y (\operatorname{div} \vec{A} + \partial_0 A_0) = s_2,$$

$$\nabla^2 A_3 + \partial_0^2 A_3 + \partial_z (\operatorname{div} \vec{A} + \partial_0 A_0) = s_3,$$

$$\nabla^2 A_0 + \partial_0^2 A_0 + \partial_0 (\operatorname{div} \vec{A} + \partial_0 A_0) = s_0.$$

Примем калибровочное условие $\operatorname{div} \vec{A} + \partial_0 A_0 = \operatorname{const} = 0$.

Для четырехпотенциала массодинамики получим уравнения, «аналогичные» используемым в электродинамике. Компоненты четырехпотенциала массодинамики подчинены «волновому» уравнению вида

$$\nabla^2 A_p + \partial_0^2 A_p = s_p, p = 1, 2, 3, 0.$$

Введём тензор $\gamma^{ik} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Используя его, запишем уравнения для гравитации в тензорной форме

$$\gamma^{kl} \partial_k \partial_l A_p(\mu) = s_p, \gamma^{kl} \partial_k A_l = 0.$$

Таковы простейшие возможности представления гравитации симметричным тензором, зависящим от четырёхпотенциала массодинамики. Аналогия с электродинамикой здесь показана многократно. Однако видны очевидные различия двух моделей.

Вариант 2. Покажем, что есть другая, более простая возможность вывода полученных формул.

Примем гипотезу о единстве электромагнитного и гравитационного полей. Будем исходить из уравнений, решения которых допускают такую возможность. Они имеют вид

$$\partial_k \partial_l \varphi_{ps} - \partial_l \partial_p \varphi_{sk} + \partial_p \partial_s \varphi_{kl} - \partial_s \partial_k \varphi_{lp} = \partial_{(k} \partial_{l} \varphi_{ps)} = 0.$$

Их решением, в частности, является симметричный тензор

$$\varphi_{kl}(\mu) = \partial_k A_l(\mu) + \partial_l A_k(\mu).$$

Опираясь на него, введем тензорную плотность (по метрике Евклида или Минковского)

$$\tilde{\varphi}^{ij} = \tilde{\sigma} \gamma^{ik} \gamma^{jl} \varphi_{kl}.$$

Рассмотрим уравнения

$$\partial_i \tilde{\varphi}^{ij} = \tilde{s}^j.$$

Они задают закон сохранения для рассматриваемой тензорной плотности, помеченной знаком тильда. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_x (2\partial_x A_x) + \partial_y (\partial_x A_y + \partial_y A_x) + \partial_z (\partial_x A_z + \partial_z A_x) + \\ + \partial_0 (\partial_x A_0 + \partial_0 A_x) = s_x \dots \Rightarrow \end{aligned}$$

Система уравнений совпадает при $K_0 = 0$ с векторными уравнениями гравидинамики, полученными выше. Следовательно, одни и те же простейшие уравнения массодинамики можно получить разными способами.

Заметим, что «электрический» вектор массодинамики построен из уравнений для четырехпотенциалов массодинамики по аналогии с «магнитным» вектором электродинамики. Заметим, что дифференциальные операторы используются разные, поэтому эта аналогия является только формальной.

АНАЛИЗ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ МАССОДИНАМИКИ

Следствие 1. Тензорные уравнения массодинамики в частном случае содержат модель Ньютона.

Действительно, если оставить ненулевой только четвертую компоненту четырехпотенциала и отождествить величину s_0 с плотностью массы ρ , получим уравнение Лапласа для гравитационного поля. Поэтому начальная модель массодинамики согласуется с теорией Ньютона. Слово «волновому» взято в кавычки потому, что дифференциальный оператор второго порядка может относиться не только к гиперболическому, но и к эллиптическому типу. Это зависит от выбора выражения для координаты времени и компонент че-

тырехпотенциала массодинамики. Обычный волновой оператор является гиперболическим. Для него известны решения и поведение полей. Этот волновой процесс хорошо изучен в электродинамике

Для эллиптического оператора меняется структура решений. Если исходным является общее выражение для четырехметрики, полученное в электродинамике, которое зависит от динамической скалярной функции, то становится возможным изменение сигнатуры. Известно, что изменение сигнатуры приводит к потере устойчивости решений. Следовательно, массодинамика изначально приводит к модели, которая обладает свойствами потери устойчивости решений, характерной для динамического хаоса.

Есть и другие специфические моменты. Действительно, рассмотрим решения в форме плоской волны для эллиптического уравнения вида

$$A_p = A_{p0} \exp \left\{ i \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) \right\}.$$

По стандартной методике получим дисперсионное уравнение

$$k^2 + \frac{\omega^2}{c_g^2} = 0.$$

Из него следует, что уравнения массодинамики для первого четырехпотенциала обладают свойством задавать мнимую скорость для гравитационного взаимодействия:

$$c_g = \pm i \frac{\omega}{k}.$$

Мы приняли точку зрения, что мнимые величины свидетельствуют о «внутренних» движениях. Тогда из простейшей модели гравидинамики следует, что у гравитации могут быть практически необнаружимые внешние движения и скрытое изменение внутреннего состояния. Таким может быть поведение конструкций, ассоциированных с массами. В частности, это могут быть некоторые периодические изменения в

самой структуре масс и тех элементов, из которых они изготовлены. По этой причине анализируемые процессы и состояния может быть сложно измерить.

«Слабость» гравитации может оказаться иллюзорной потому, что для нее могут быть более важны внутренние движения, а внешние проявления могут быть достаточно малы.

Следствие 2. Тензорная модель массодинамики содержит в себе модификацию моделей гравитации Эйнштейна и Логунова

Рассмотрим систему уравнений массодинамики для первого четырехпотенциала без учета конвективных движений в виде

$$\gamma^{kl} \partial_k \partial_l A_p = 0, \gamma^{kl} \partial_k A_l = 0.$$

Покажем, как из неё следует релятивистская модель гравитации Логунова. Выразим четырехпотенциал гравидинамики $A_p(g)$ через четырехскорость праматерии u^s и симметричный тензор второго ранга $\sigma_{ps}, \sigma = \det|\sigma_{ps}|$, который ассоциирован с тензором энергии-импульса праматерии. Пусть

$$A_p = \sigma_{ps} \sqrt{-\sigma} \frac{u^s}{\sqrt{-\sigma}} = \tilde{\sigma}_{ps} \hat{u}^s.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma^{kl} \partial_k \partial_l A_p &= \gamma^{kl} \partial_k \partial_l (\tilde{\sigma}_{ps} \hat{u}^s) = \\ &= (\gamma^{kl} \partial_k \partial_l \tilde{\sigma}_{ps}) \hat{u}^s + 2\gamma^{lk} \partial_l \tilde{\sigma}_{ps} \partial_k \hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps} \gamma^{kl} \partial_k \partial_l \hat{u}^s. \end{aligned}$$

Примем предположения:

- конвективные слагаемые, описывающие гравитацию, значительно «меньше» волновых слагаемых,

- поведение праматерии согласовано со свойствами грубой материи, в частности, с тензором энергии-импульса материи $\tilde{T}_{ps}$,

- алгоритм позволяет учесть дополнительно тензор энергии-импульса самого гравитационного поля $\tilde{T}_{ps}(g)$,

- зададим сумму конвективных и волновых движений праматерии условием

$$2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s = (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s.$$

Получим уравнения массодинамики, согласованные с поведением праматерии:

$$\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} = k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}.$$

Найдем дополнительные ограничения, следующие из калибровочных условий:

$$\gamma^{kl}\partial_k A_l = \gamma^{kl}\partial_k(\tilde{\sigma}_{ls}\hat{u}^s) = (\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls})\cdot\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = 0.$$

Если

$$\tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s = \tilde{\chi}_s\hat{u}^s,$$

то

$$\gamma^{kl}\partial_k\tilde{\sigma}_{ls} = \tilde{\chi}^s.$$

В предлагаемой системе уравнений массодинамики кроме анализа «метрического тензора» проводится расчет поведения праматерии. Ее поведение будет зависеть от поведения массивных тел, а также от гравитационного излучения.

Эта модель является новой по ряду признаков. Она двухуровневая. У нее есть возможности, не учитываемые в обычных моделях гравитации. Кроме этого, в ней «метриче-

ский тензор» или физическое тензорное поле являются частью общей конструкции в массодинамике. Простейшая тензорная модель массодинамики, учитывающая движение праматерии, зависящее от массивных тел, имеет вид:

$$\begin{aligned}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ps} &= k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}_{ls} = \chi_s, \\ 2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s &= (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s, \\ \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s &= \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.\end{aligned}$$

Введем контрвариантные компоненты используемых тензоров по правилу

$$\tilde{\sigma}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{\sigma}^{rq}, \tilde{T}_{ps} = \lambda_{pr}\lambda_{sq}\tilde{T}^{rq}.$$

Пусть $\lambda_{ij} = \text{const}$. Указанные выше уравнения преобразуются в систему вида

$$\begin{aligned}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\tilde{\sigma}^{ps} &= k\tilde{T}^{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}^{ps}, \\ \gamma^{kl}\partial_k\delta_{lp}\tilde{\sigma}^{ps} &= \tilde{\chi}^s, \\ 2\gamma^{lk}\partial_l\tilde{\sigma}_{ps}\partial_k\hat{u}^s + \tilde{\sigma}_{ps}\gamma^{kl}\partial_k\partial_l\hat{u}^s &= (k\tilde{T}_{ps} + \varepsilon\tilde{\sigma}_{ps})\hat{u}^s, \\ \tilde{\sigma}_{ls}\gamma^{kl}\partial_k\hat{u}^s &= \tilde{\chi}_s\hat{u}^s.\end{aligned}$$

Они обобщают систему уравнений релятивистской теории гравитации: мы используем в ней систему четырехметрик, гравитационные явления зависят от поведения праматерии. К таким выводам мы приходим, используя только один тензор массодинамики. Возможно, он описывает структуру и влияние 0-Ритов для гравитации. Однако есть еще второй тензор массодинамики, который подчинен более сложным уравнениям. Возможно, он описывает структуру и поведение 1-Ритов, ассоциированных с массами. В любом случае пред-

лагаемая модель массодинамики качественно отлична от моделей, используемых ранее в физике.

Поскольку релятивистская теория гравитации не только согласуется с подходом и моделью Эйнштейна, а развивает и обобщает ее, предлагаемая модель гравидинамики содержит в себе в частном случае теорию гравитации Эйнштейна.

Учет материальных тел, как это уже обнаружено в теории электрона и в гидродинамической модели микродинамики, может и должен выполняться через конструирование правых частей предлагаемых уравнений. Однако это только одна возможность.

Есть и другие возможности. Поскольку материя многоуровневая, требуется задавать структурные и динамические уравнения для каждого уровня материи. Затем их нужно согласовывать друг с другом. Такие задачи не решались физиками. К ним подойти нужно со всем вниманием и осторожностью.

Из общих соображений следует, что вариант абелевой гравидинамики значительно выходит за рамки стандартной классической релятивистской теории гравитации.

Обратимся к релятивистской теории гравитации Логунова. В его модели введено соответствие

$$g_{rl} = \sqrt{-\gamma} \gamma_{rl} + \sqrt{-\gamma} \varphi_{rl}.$$

Здесь $\gamma = \text{Det} \gamma_{rl}$, $\gamma_{rl} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ – метрика Минковского, φ_{rl} – тензорное физическое поле гравитации. Поскольку поля инерции могут и должны быть присущи любому материальному объекту (а «поля» относятся к таким объектам), то гравитационное поле имеет как инерцию, так и свои специфические свойства. Поэтому может и должна быть пара тензорных физических полей, что обнаруживается при построении массодинамики по аналогии с электродинамикой.

В электродинамике эффекты инерции скрыты из-за тождественного выполнения первой пары уравнений электродинамики при переходе к четырехпотенциалам. Но они учтены

ваются во второй паре уравнений через связи между полями и индукциями. В случае пространства постоянной кривизны метрика инерции подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \Omega_{ij} R = 0.$$

Логунов показал, что уравнения релятивистской теории гравитации приводят к формальному соответствию с теорией гравитации Эйнштейна, хотя физические их основы и выводы во многом различаются. В этом случае «эффективная» метрика будет подчинена уравнениям

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \Omega_{ij} R = \kappa T_{ij}.$$

В силу указанных обстоятельств мы вправе ожидать, что, с общих позиций анализа, бипотенциальная абелева массодинамика представляет собой дальнейшее развитие известных моделей гравитации. Возможность рассмотрения метрического тензора гравитации как тензорного произведения пары четырехпотенциалов гравидинамики свидетельствует о том, что мы имеем модель, учитывающую глубинные стороны и свойства гравитации. Аналогия с электродинамикой облегчает понимание физических ситуаций в гравитации и, по видимому, стимулирует создание технических устройств, пригодных для новой физической практики.

Наличие четырехпотенциала позволяет ввести в рассмотрение семейство решений в форме постоянных значений четырехпотенциала. При переходе к четырехметрикам эффективного риманова пространства на основе тензорного произведения четырехпотенциалов мы получим систему четырехметрик, имеющих постоянное значение. В частности, из уравнений для первого четырехпотенциала массодинамики следует метрика Ньютона.

Система постоянных четырехметрик является качественно новым звеном электродинамики в спинорной форме. Она важна и для других разделов физики.

Легко понять, что предложенная модель является простейшей. Происходит это по двум причинам. Во-первых, не детализирован тензор напряжений праматерии и ее состав-

ляющие. Поскольку мы выделили систему базовых физических объектов и допускаем существование большого количества изделий, изготовленных из них, указанные выше величины будут зависеть от всех физических слагаемых. Во-вторых, следует учесть всю систему ранговых движений: размеры, скорости, ускорений и т.п. В частности, требует усложнения зависимость 4-потенциала массодинамики от всей совокупности обозначенных величин и их свойств. Например, можно рассмотреть выражение

$$A_k(g) = a_s \sigma_{kl}^{sp} v_p^l + b_s \kappa_{kl}^{sp} v_p^l.$$

Здесь индекс s выражает ранг учитываемого движения, индекс p выражает тип микрообъекта, принадлежащего тонкой материи (открытые или замкнутые струны, электрические или гравитационные предзаряды...). Тензоры $\sigma_{kl}^{sp}, \kappa_{kl}^{sp}$ — задают слагаемые напряжений в тонкой материи, обусловленные разными типами этой материи.

Понятно, что возникает проблема замыкания уравнений для тонкой материи, решение которой станет возможным после достаточно сложной экспериментальной работы.

Концепция тонкой материи наполняется новым физическим содержанием после принятия концепции трансфинитности материи. В этом случае речь идет о системе уровней материи и о необходимости их учета на практике. В частности, требуется согласование структур и активностей любого изделия, изготовленного из материи разных уровней.

Следствие 3. Тензорная модель массодинамики инициирует построение феноменологической теории гравитации

Многоуровневость материи позволяет по-новому подойти к известной информации о поведении объектов. Так, закон взаимодействия масс допускает новую интерпретацию в модели гравитации, базирующейся на концепции тонкой материи, концен-

трирующей за пределами макроскопических тел. Пусть плотность тонкой материи, индуцированная массой M , подчинена закону

$$n = n(M) \ln(r + r_a), n(M) = \kappa M, r_0 \leq \varepsilon$$

Пусть сила, действующая на массу m , зависит не только от градиента плотности тонкой материи, но и от качества силовых линий, связывающих тела и управляемых функцией Φ :

$$\vec{F} = \alpha m \Phi \frac{dn}{d\vec{r}}, \Phi(r + r_b) = \beta = \text{const}$$

Тогда получим обобщение закона Ньютона для гравитационного взаимодействия масс:

$$\vec{F} = \gamma \frac{Mm}{(r + r_a)(r + r_b)} \vec{s} \cong \gamma \frac{mM}{r^2} \vec{s}$$

Из анализа взаимосвязи уравнений микромира и макромира следует, что в атомах и молекулах тонкая материя «покоится». Это обстоятельство позволяет предположить, что движущаяся тонкая материя распределяется между грубой материей.

С одной стороны, при условии, что плотность тонкой материи растет по мере удаления от грубой материи, мы приходим к наглядной физической модели гравитации. Механизм ее состоит в том, что плотная тонкая материя «толкает» грубые материальные тела в сторону менее плотной тонкой материи.

С другой стороны, принимая структуру электростатического поля в виде реальных физических силовых нитей, мы обязаны принять в расчет их структуру и специфику их взаимодействия между собой.

С третьей стороны, следуя анализу, проведенному для частиц света, выступающих в роли факторов электромагнитного

взаимодействия, они образованы из тонкой материи. Поэтому электрические заряды рожают излучение, образованное элементами тонкой материи. В этом случае аналогичная точка зрения должна быть использована в модели гравитационного взаимодействия. Нужно учесть роль гравитационного излучения в модели гравитационного взаимодействия, основанной на концепции тонкой материи.

Рассмотрим указанные факторы. Пусть масса M расположена на расстоянии r от массы m .

Введем нормированную плотность тонкой материи, выражая ее через систему канонических изделий, в виде, косвенно учитывающем указанные свойства:

$$n = a\sqrt{M} \left(\ln(r + r_0) + \frac{b}{r + r_b} + \frac{c}{(r + r_c)^2} \right).$$

Первое слагаемое считаем главным членом, «константы» b, c малы. Рассмотрим закон взаимодействия для масс вида

$$F = \alpha m \left(\frac{dn}{dr} \right)^2.$$

Получим выражение

$$F = \alpha^2 amM \left(\frac{1}{(r + r_0)} - \frac{b}{(r + r_b)^2} - \frac{2c}{(r + r_c)^3} \right)^2.$$

Отметим, что сила обладает уникальными свойствами для малых значений r . Это обстоятельство может сыграть важную роль в анализе динамике Солнца. Величины α, a, b, r_0, r_b следует выбирать, используя экспериментальные данные. Полученный закон выражает, в частности, известные эмпирические фак-

ты, присущие гравитации. Для движения планет они установлены Ньютоном в форме

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

Для смещения перигелия планет они установлены Эйнштейном в форме

$$F^* = \sigma \frac{mM}{r^3}.$$

Покажем, что предложенная наглядная модель гравитационных явлений указывает вариант уточнения общей теории в форме спинорной массодинамики. В ней тензор гравитационного поля выражен в форме

$$F_{mn} = \partial_m A_n + \partial_n A_m.$$

Четырехпотенциал $A_n(\mu)$ выражен через тензор напряжений тонкой материи σ_{kp} и её четырехскорость v^p величинами $A_n(\mu) = \sigma_{np} v^p$. Для скалярного потенциала имеем зависимость:

$$\phi = \sigma_{0p} v^p.$$

С другой стороны, следуя эмпирической модели, получим

$$\phi = \sqrt{M} \frac{dn}{dr}$$

Следовательно, тензор напряжений *может иметь* связь с градиентом плотности тонкой материи

$$\sigma_{kp} = \kappa_{kp}^{rs} \frac{dn_s}{dQ^r}$$

Величина Q^r не обязана быть метрикой, она может быть некоторым метрическим функционалом, учитывающим тонкости гравитационного взаимодействия.

Следствие 4. Тензорная модель массодинамики инициирует решение ряда философских аспектов теории гравитации

Спинорная модель содержит в себе как модель гравитации Ньютона, так и модели гравитации Эйнштейна и Логунова. Однако 4-метрика, используемая в геометрической модели, является лишь вторичным математическим элементом более общей модели. Её физические основы содержатся в тензоре напряжений тонкой материи. Принятие модели трансфинитной материи в сочетании с новой связью микро – и макродинамик приводит к идее, что основу физики гравитации могут задавать статические и динамические свойства тонкой материи – праматерии. Исходя из этого положения предложены структурные модели положительного и отрицательного гравитационных предзарядов. Дано их начальное симметричное обоснование. В частности, предложены структурные модели положительных и отрицательных электрических и гравитационных предзарядов. Анализ показал, что одни заряды неотделимы от других. Они могут превращаться друг в друга.

Для понимания сущности частиц света и построения их структурной модели требовалось выразить физически и промоделировать математически их гравитационные свойства. Из электродинамики Максвелла мною было получено доказательство, что метрика Римана является в ней вторичной структурой. Метрика Картана, неевклидова в трехмерии, заняла место первичной. Естественно ожидать наличия неримановой, спинорной модели гравитации. Анализ показал, что спинорная модель гравитации действительно обеспечивает аналогию между электро-

магнитным и гравитационным полями. Она дает новые возможности обобщения и понимания гравитации.

Отметим, что современные модели представляют собой попытки понять и описать гравитацию, изучая ее «внешние», видимые проявления. Например, так исследуется поведение планет Солнечной системы. Они моделируются массой и скоростью, присоединенными к физическому пространству и времени. Такой подход не в состоянии постичь «внутреннюю» сущность гравитации, построить, например, модель гравитационного заряда. Не изучаются и внутренние движения, присущие гравитации. По форме и по сути подхода они продолжают модели одноуровневого материального мира, когда базовым физическим элементом анализа являются макротела. Практика давно уже свидетельствует, что реальность многоуровнева. Материя имеет множество структурных элементов, софистатных друг другу. Поэтому становится актуальным и неизбежным анализ структурных составляющих материи, относящихся к гравитации. Требуется структурная теория гравитационных зарядов, а также физический анализ взаимодействий. Движение в этом направлении объективно приведет к структурной модели гравитации. В ней должна быть как-то отражена «квантовая» версия гравитации.

И по форме и сути спинорную структуру уравнений массодинамики можно рассматривать как начало многоуровневой модели гравитационных явлений. Она ранее была обнаружена в электродинамике, однако в этом случае многоуровневость «скрыта». Произошло так потому, что электродинамика базируется на алгебре, качественно отличной от алгебры для массодинамики. В массодинамике возможно добавление конвективных слагаемых, что делает ее близкой к микродинамике. Более того, в таком варианте обнаруживаются естественные софистатности новой модели с известными, если на движение разных уровней материи накладываются дополнительные условия.

Отметим некоторые общие закономерности анализа трансфинитных изделий:

а) Поскольку трансфинитной материи, согласно развиваемому подходу, присуща иерархия зарядов, относящихся к гравитационному (массовому) и электрическому типу, очевидной становится трансфинитность энергии, а также неэквивалентность массы и энергии, присущая подходу, основанному на теории относительности Эйнштейна. Трансфинитность материи приводит к очевидному выводу о физическом единстве вещества и поля, корпускул и волн. Их трансфинитное содержание существенно глубже стандартного одноуровневого варианта с присущей ему системой ограничений.

б) проведенный анализ позволил «увидеть» иерархию механизмов образования частиц света. С одной стороны, они могут быть получены из анализа взаимодействия физических объектов более высокого уровня материи (атомов, молекул, элементарных частиц), выступающих в роли источников и своеобразного «завода» для «спрятанных в них» частиц света. С другой стороны, они могут быть получены из анализа взаимодействия физических объектов более низкого уровня материи, выступающего в роли «интеллектуального океана» для частиц света. Понятно, что возможно сочетание пары указанных механизмов. Понятно, что в образовании и разрушении объектов конкретного уровня материи может участвовать система высших и низших уровней материи. Понятно, что для любых других частиц, в силу принципа софистатности, ситуация выглядит аналогично: реальности присуща иерархия механизмов образования частиц. Отметим, что «простые», с математической точки зрения, изделия обладают системой скрытых свойств, которые невыполнимы для «сложных» изделий. Принимая софистатность математики и физики, мы можем ожидать, что «простой тонкий мир» подчинен сложнейшим законам, многие из которых скрыты.

в) Трансфинитность материи предполагает трансфинитность симметрий, присущих трансфинитным изделиям и трансфинитным процессам. В роли такого процесса выступает, в частности, процесс измерения. Он базируется, с одной стороны, на изделиях определенного вида, с другой стороны, на некоторых взаимодействиях, которые удастся зафиксировать экспериментально. Симметричные аспекты измерения становятся объек-

тивно необходимым звеном физической модели. В частности, на основе симметрий становится возможным описание динамических процессов. В релятивистской электродинамике роль такой симметрии выполняет система групп – сигруппа. Используя матричное произведение полученных элементов сигруппы, легко показать, что они образуют лупу Муфанг. Для её элементов справедливо равенство

$$(ab)(ca) = (a(bc))a = a((bc)a).$$

По аналогии с электродинамикой предложена спинорная форма модели гравитации. Дано её тензорное представление. Оно обобщает систему уравнений релятивистской теории гравитации Логунова. В модели используется система четырехметрик. Обоснована точка зрения, что гравитационные явления зависят как от состояния и поведения материи, так и от состояния и поведения праматерии – тонкой материи. Новая модель содержит в себе уравнения теории гравитации Эйнштейна, интерпретируя симметричный метрический тензор как тензор напряжений тонкой материи. Предложена феноменологическая модель гравитации, которая позволяет получить основные законы гравитации на основе простых предположений о поведении тонкой материи. Решение намеченных проблем актуально. Они приближают новый этап развития гравитации, в котором будет больше физики и больше технических приложений.

14. ПЕРСПЕКТИВЫ ДЕФОРМАЦИИ МОДЕЛЕЙ

Есть эффект «инфицирования» канонической группы деформированным её элементом. Он состоит в том, что при произведении элементов появляются новые деформированные элементы со сложной структурой. Действительно, получим, например

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & w_1 a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & w_2 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 w_2 b_4 \\ a_3 b_1 + w_1 a_4 b_3 & a_3 b_2 + w_1 w_2 a_4 b_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & w_2 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 w_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + w_2 a_4 b_4 \end{pmatrix} \dots$$

Физическая сущность деформации симметрий сводится к изменению системы отношений между объектами, которые задаются системой матриц. При этом допускается неэквивалентность отношений. Действительно, при деформации уравнений электродинамики мы получаем, например, вариант изменения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(w) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -w^2 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку деформированные элементы симметрии принадлежат алгебре, в том числе алгебре Йордана, их действие естественно назвать действием алгебры. Дело здесь не в формальном изменении слов, а в глубинном различии действия групп и действия алгебр. Классификация состояний реализуется на основе действия групп. Классификация процессов реализуется на основе действия алгебр. В качестве элементов таких алгебр могут использоваться деформированные элементы групп.

Деформация симметрий представляет собой алгоритм исследования совокупности скрытых свойств симметрий. Для применения деформированных симметрий в физических моделях возможны разнообразные приемы и методы. Они раскрывают скрытые от поверхностного анализа свойства физических изделий и явлений, которые им присущи. В силу указанных обстоятельств мы вправе на начальной стадии анализа конструировать физическую модель на некоторой группе симметрии

и на этой основе анализировать свойства объектов и явлений. На второй стадии требуется анализ разнообразных деформаций физической модели, который позволит обнаружить и использовать на практике новые стороны и свойства физической реальности.

Деформация физических моделей реализуется на всех её элементах. Таковы величины, используемые в модели, дифференциальные и интегральные операторы, начальные и граничные условия. Могут меняться также используемые математические операции, что позволит учесть новые свойства взаимодействия и отношений между физическими объектами. Деформация модели предполагает также деформацию логической структуры подхода и деформацию её интерпретаций.

Представляет интерес задача деформации дифференциальных и интегральных операторов. Если дифференциальный или интегральный оператор обладает избирательностью по отношению к элементам, используемым в физической модели, получим новые возможности моделирования и анализа ситуаций. Так, например, деформированная частная производная от произведения функций при условии, что она «не чувствует» одну из функций, будет «рассматривать её» как постоянную. Аналогично частные производные «чувствуют» координаты. В рассматриваемом случае они не «чувствуют» своих координат, которые спрятаны в «неощущаемой» функции. Тогда

$$\partial_{x(\varphi)} \varphi(x) f(x) = \varphi(x) \partial_{x(\varphi)} f(x).$$

Физическая модель проверяется и утверждается на основе экспериментов. Деформированная математическая модель способна давать решения, которые очень сложно проверить на эксперименте стандартными приборами. Для деформированных моделей могут потребоваться «деформированные» экспериментальные средства. Следуя аналогии с деформацией модели, они будут иметь дополнительные элементы и измененную начальную конструкцию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможна деформация связей между полями и индукциями в электродинамике Максвелла, позволяющая учитывать все инерциальные факторы. Обобщенная модель не использует специальной теории относительности и базируется на пространстве Ньютона. Она допускает сверхсветовые скорости и указывает условия, где и как их обнаружить. Модель корректно описывает известные экспериментальные факты, учитывает динамику инерционных характеристик электромагнитного поля. Модель предсказывает возможность движения тел ненулевой массы со скоростью света в вакууме.

Показано, что канонические симметрии, используемые в стандартных физических моделях, можно рассматривать как «верхушку айсберга симметрий». Основная часть «айсберга», которая проявляет себя через механизм деформации симметрий, скрыта от применений до тех пор, пока она не применена в физической модели.

Поскольку симметрии и когомологии «работают» на всех уровнях материи, полученные результаты имеют общее значение и могут применяться как при анализе свойств макромира, так и при исследовании свойств микромира.

В силу этого обстоятельства при создании и утверждении на практике качественно новых моделей требуется новое качество мышления, эксперимента, моделирования, практики.

Деформации физических моделей прямо или косвенно деформируют симметрии модели. Поскольку деформация симметрий глубоко исследовалась математиками, интересно рассмотреть аспекты физической деформации с этой точки зрения. Предметом исследования становятся гомологии и когомологии групп и алгебр, а также их дуальных моделей, в частности, квантовых групп и коалгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. / Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1966, -Т.1. -С. 7.
2. Compton A.H. A quantum theory of the c-scattering of X-rays by light elements // Phys. Review. – 1923. – v.21. – №5. – P.483-502.
3. Демельт Х. Эксперименты с покоящейся изолированной субатомной частицей / УФН. – 1990. – т. 160, в.12. – с.129-139.
4. Минковский Г. Вывод основных уравнений для электромагнитных процессов в движущихся телах с точки зрения теории электронов. // Эйнштейн. сб.: 1978-79. -М.: Наука, 1983 С. 64-91.
5. Барыкин В.Н. Новые пространственно-временные симметрии в электродинамике сред. // Изв. вузов. Физика. – 1986. – № 10. – с. 26-30.
6. Барыкин В.Н. О физической дополнителности групп Галилея и Лоренца в электродинамике изотропных, инерциально движущихся сред. // Изв. вузов. Физика. -1989. -N 9. -С. 57-66.
7. Барыкин В.Н. К математическому моделированию электромагнитных явлений в движущемся разреженном газе. // Изв. вузов. Физика. – 1990. -№ 10. – с.54-58.
8. Барыкин В.Н. Пространственно-временные симметрии в электродинамике изотропных, инерциально движущихся сред /Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1986. -Т. 1. С. 461-466.
9. Столяров С.Н. Граничные задачи электродинамики движущихся сред. / Эйншт. сб. 1975-76. -М.: Наука, 1977. -С. 152-215.
10. Франкфурт У.И. Оптика движущихся сред и СТО. /Эйншт. сб. 1977. -М.: Наука, 1980. С. 252-325.
11. Барыкин В.Н. Лекции по электродинамике и теории относительности без ограничения скорости. – Мн.: АП "Белпроект", 1993, 223 с.
12. Jacobson N. Structure and representation of Jordan algebras, Providens, 1968.
13. Akivis M.A. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs/ -Dordrecht/Boston/London/ -1992. -358 pp.
14. Шелехов М.А. Математические заметки, 50:4 (1991) 132.

Научное издание

Барыкин Виктор Николаевич

**Деформация
физических моделей**

Ответственный за выпуск Владимир Кузьмин

Подписано в печать 17.02.2012.

Формат 60х84^{1/8}. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 11,1. Уч.-изд. л. 3,6.

Тираж 50 экз. Заказ 19.

ООО «Ковчег»

ЛИ № 02330/0548599 от 09.07.2009.

Пр. Независимости, 68-19, 220072 г. Минск

Тел./факс: (017) 284 04 33

kovcheg_info@tut.by

ISBN 978-985-7006-62-5

